INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Zpracování signálů pro diagnostiku a jeho aplikace

Jindřich Liška

10. prosinec 2010

Západočeská univerzita v Plzni

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

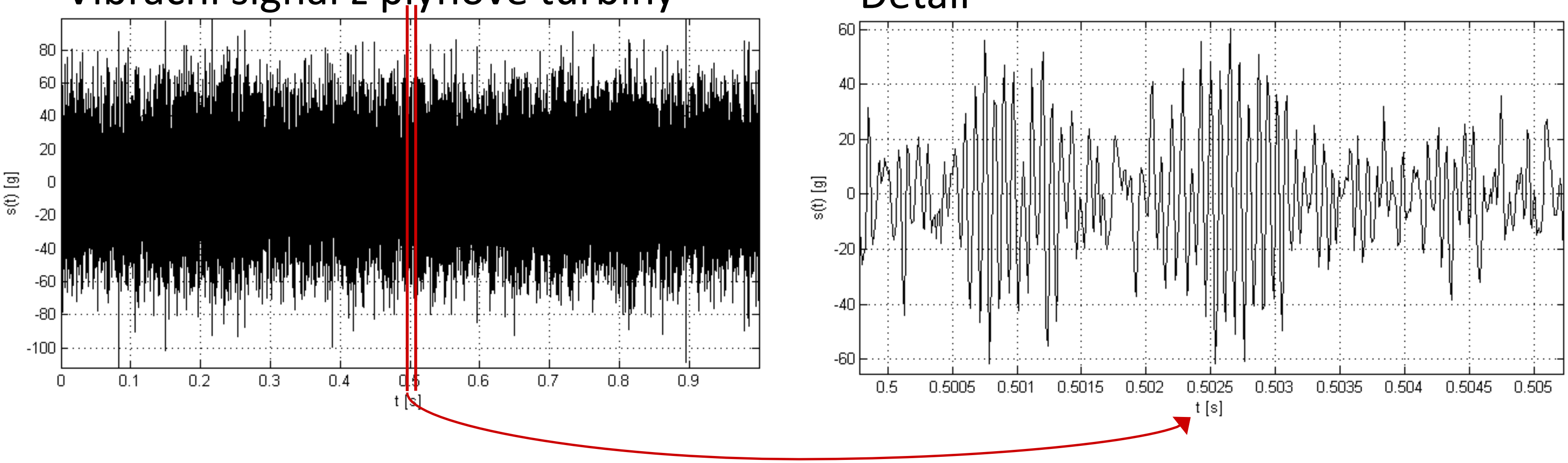
Obsah

- Úvod
- Princip neurčitosti
- Hilbertova transformace
- Wigner-Villeova distribuce
- Wavelety - vlnková transformace
- Hilbert-Huangova transformace
- Kalmanův filtr
- Principy a postupy metod využívané v diagnostice
- Stochastické normování v časo-frekvenční oblasti
- Úplné spektrum
- Ukázky rubbingu na rotorovém stendu fy Bently Nevada

Analýza signálů v časové oblasti

Vibrační signál z plynové turbíny

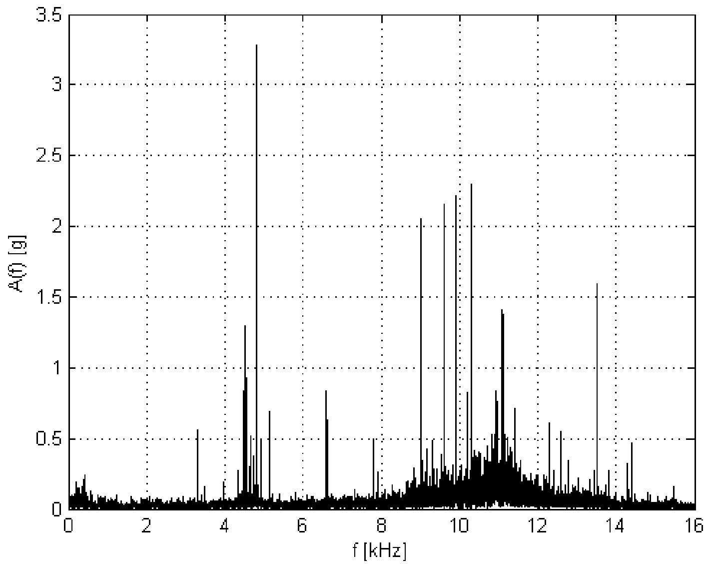
Detail



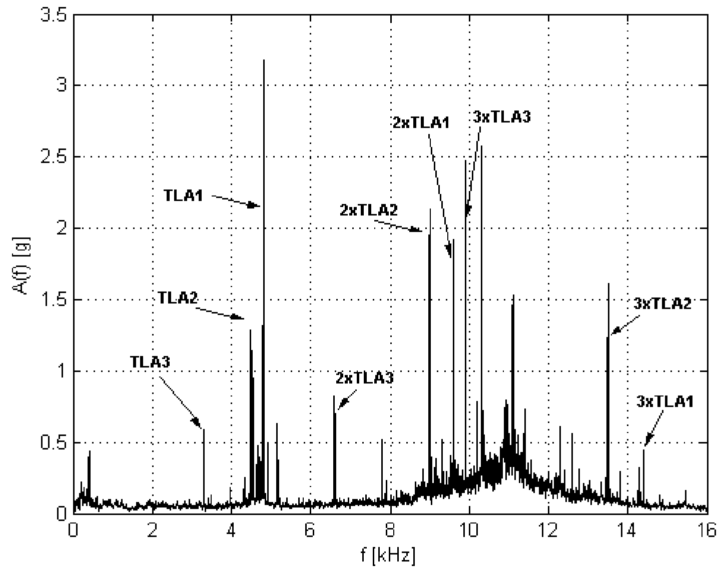
- z časového průběhu nelze často získat dostatečné množství informace
- změny vlastností systému jsou skryty v šumu pozadí (strukturální vibrace, akustické rezonance, …)
- projevy nastávající poruchy jsou modulovány vlastní rezonancí senzoru

- Využití **Fourierovy transformace** – diskrétní Fourierova transformace – rychlá Fourierova transformace (FFT)
- Parametrické metody pro odhad spektra – Burg, Yule-Walker
- Průměrování spekter – v diagnostice nejpoužívanější metoda ke snížení šumu ve spektru

2^{16}, bez překrytí a průměrování



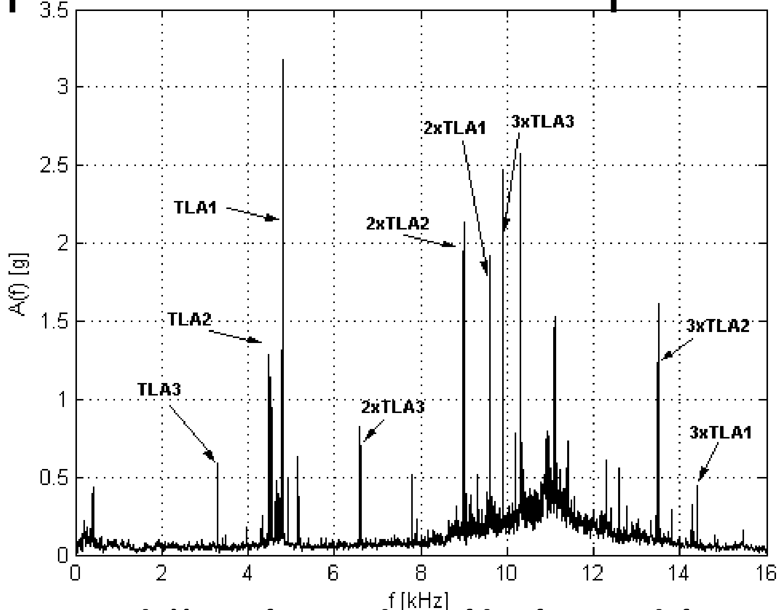
2^{14}, překrytí 75%, průměrováno ze 13 spekter

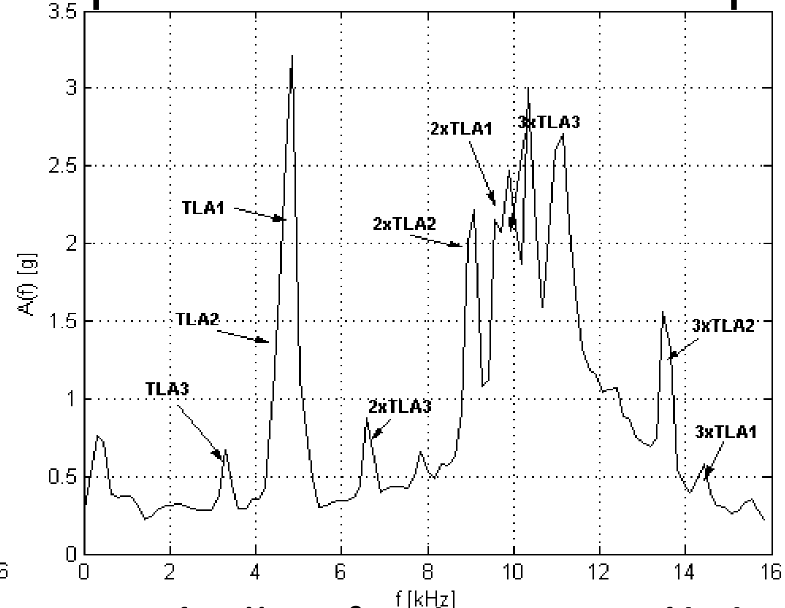


Analýza signálů ve frekvenční oblasti

2^{14}, překrytí 75%, průměrováno ze 13 spekter

2^{10}, překrytí 75%, průměrováno ze 127 spekter





- Rozlišení spektrální analýzy – nutné přizpůsobit typu úlohy
- Nutným předpokladem průměrování je stacionarita a linearita dat

Analýza signálů ve frekvenční oblasti

Reálná diagnostická data z většiny procesů jsou ve své podstatě nejčastěji:

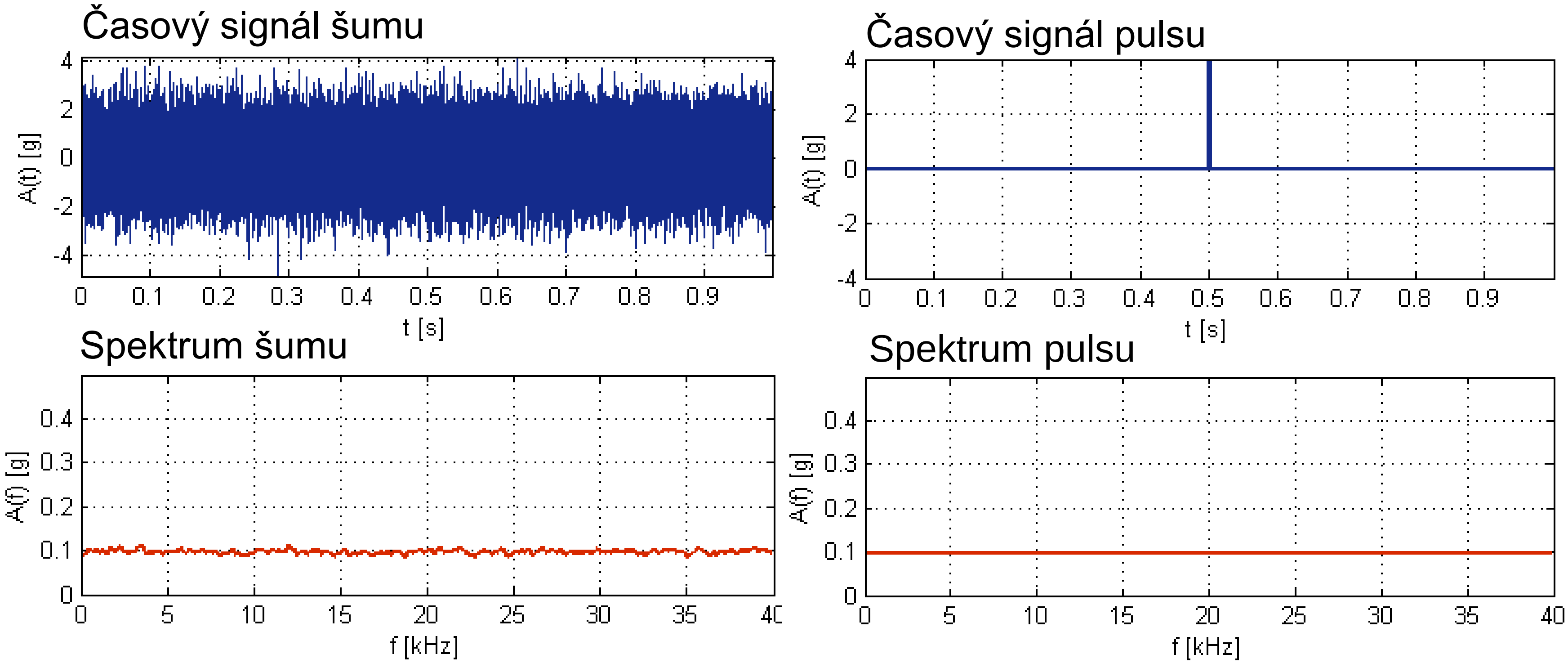
- **nestacionární**
- **nelineární**
- **příliš krátká (neopakovatelná)**

Fourierova transformace je obecná metoda pro analýzu celkového rozložení amplitudy resp. energie v závislosti na frekvenci, ale:

- systém musí být **lineární**
- data musí být **stacionární**
- nelze rozlišit **puls** a **šum**

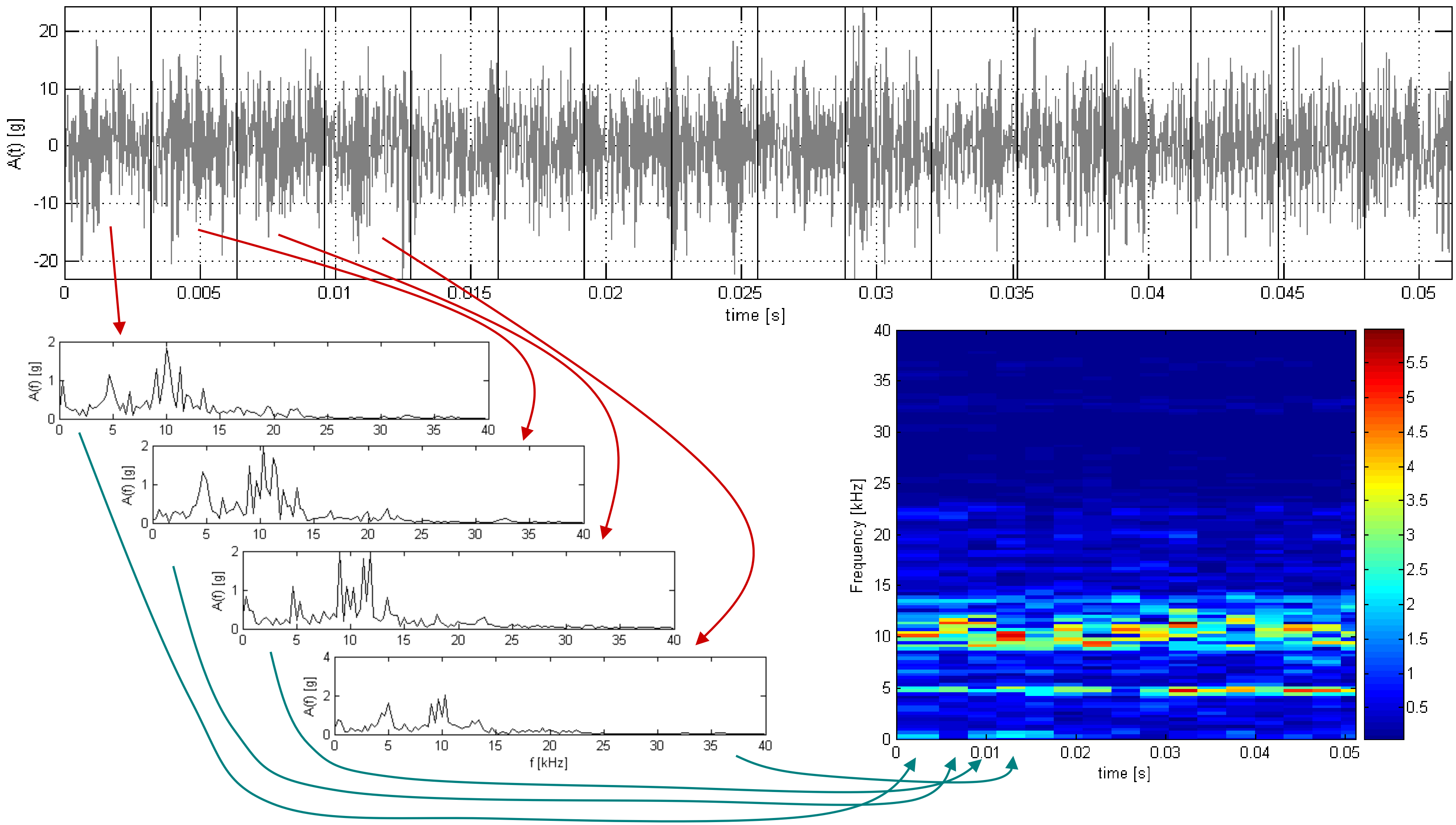
V případě nelineárních a nestacionárních dat je výsledek transformace určitým způsobem **průměrován** a může tak být **chybně interpretován**.

Bílý šum a puls ve frekvenční oblasti



- V reálných aplikacích s malým poměrem signál/šum je často obtížné z časového průběhu určit objevuje-li se v provozním šumu pulzní rušení (vibrační nestacionarity)
- Z frekvenčního spektra nelze rozpoznat jedná-li se o spektrum šumu, nebo o nestacionaritu ve formě pulsu

Analýza signálů v časo-frekvenční oblasti – krátkodobá Fourierova transformace



Analýza signálů v časo-frekvenční oblasti – krátkodobá Fourierova transformace

- Short-Time Fourier Transform (*STFT*)

$$S_t(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau$$

- Spektrogram

$$P_{SP}(t,\omega) = \left|S_t(\omega)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-j\omega\tau} s(\tau) h(\tau - t) d\tau\right|^2$$

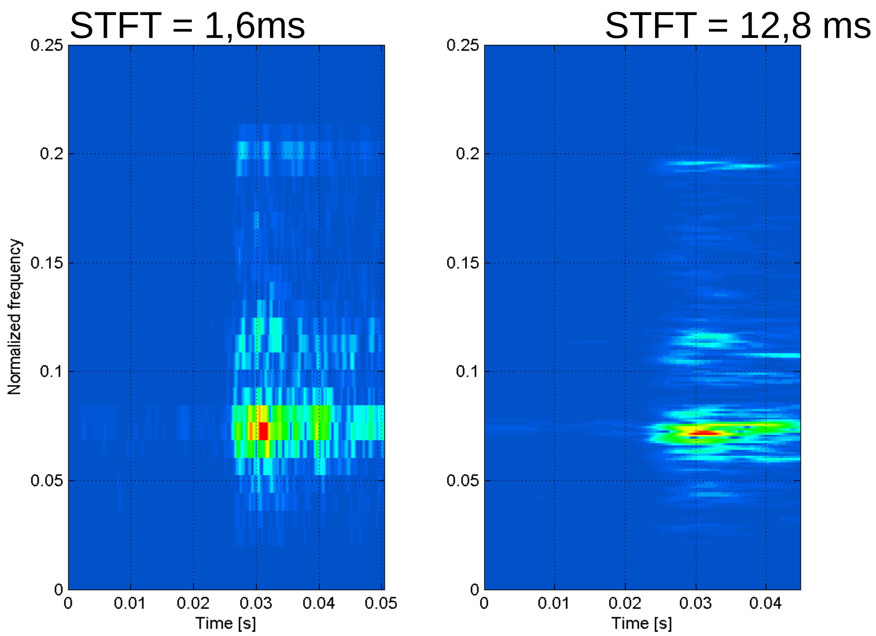
Umožňuje sledovat změnu amplitudy (energie) signálu v závislosti na frekvenci a čase

- analýza je ovlivněna **Heisenberg-Gaborovým principem neurčitosti**

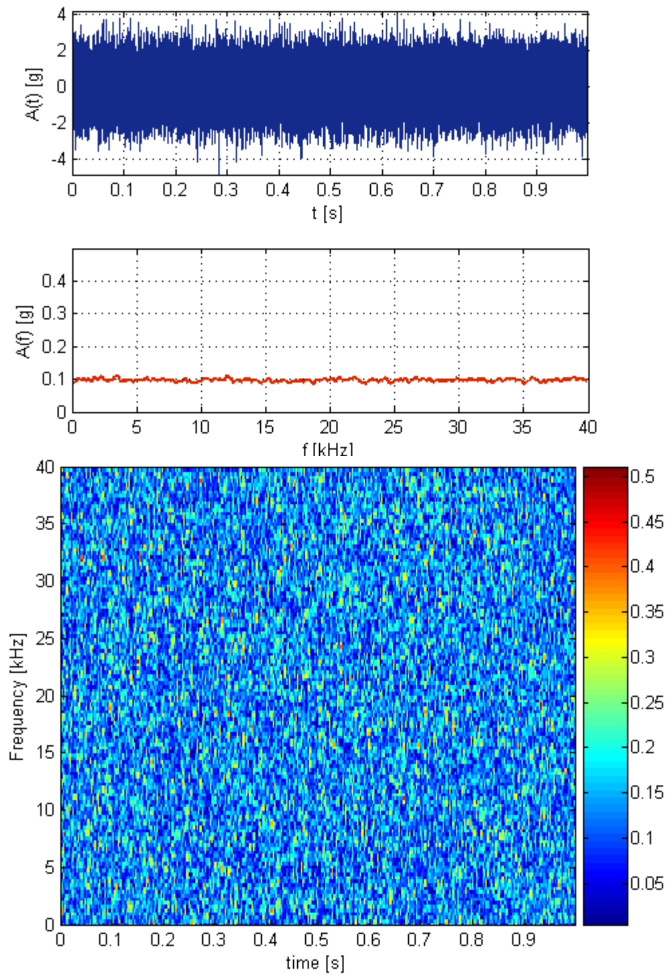
$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{2}$$

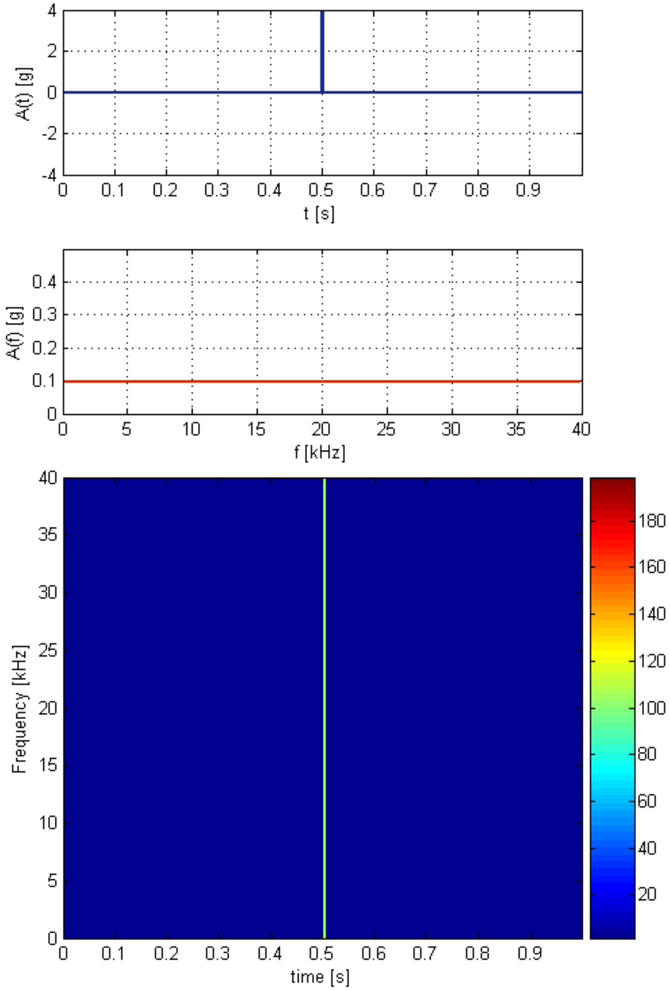
- Závislost rozlišení ve frekvenci a v čase na délce použitého okna
- Nutné najít vhodný kompromis (vzhledem k řešené úloze)

Akustická událost z primárního okruhu JE



Analýza signálů v časo-frekvenční oblasti – bílý šum versus puls





PRINCIP NEURČITOSTI

Princip neurčitosti

Princip neurčitosti ve fyzice – tzv. Heisenbergův princip

- matematická vlastnost dvou konjugovaných veličin
- typicky hybnost a poloha částic (kvantová fyzika)
- poloha a hybnost jedné částice nemohou být stanoveny současně s nekonečnou přesností. Čím přesněji určíme jednu z konjugovaných vlastností, tím nepřesněji můžeme určit tu druhou, bez ohledu na kvalitu použité měřicí techniky.

Princip neurčitosti v analýze signálů – tzv. Heisenberg-Gaborův princip

- Časovou a frekvenční informaci nelze ze signálu určit s nekonečnou přesností současně (nelze určit přesně frekvenci a zároveň polohu jejího výskytu v čase)
- Časově široké okno pro všechny frekvence má velkou rozlišitelnost ve frekvenci a malou v čase a naopak pro časově úzké okno velkou rozlišitelnost v čase a malou ve frekvenci.

Energie signálu

Uvažujme libovolný signál x(t) a jeho Fourierovu transformaci S(ω).

$$S(\omega) = \int_t x(t)\, e^{-i\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_\omega S(\omega)\, e^{i\omega t} d\omega$$

Energie E signálu x(t) je pak popsána následujícím vztahem:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega$$

Střední hodnota času a frekvence signálu

Nechť je dále definována střední hodnota signálu x(t) v čase a ve frekvenci

$$t_m = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} t\left|x(t)\right|^2 dt$$

$$\omega_m = \frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\left|S(\omega)\right|^2 d\omega$$

Vzhledem k tomu, že člen $\frac{1}{E}\left|x(t)\right|^2$ a $\frac{1}{E}\left|S(\omega)\right|^2$ jsou nenegativní a jejich integrál je jednotkový, splňují požadavky kladené na pravděpodobnostní hustotní funkci náhodných veličin t a ω a mluvíme tak o střední hodnotě těchto veličin

Směrodatná odchylka času a frekvence signálu

Směrodatná odchylka těchto veličin je pak dána následujícími vztahy:

$$\sigma_t = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(t-t_m)^2\left|x(t)\right|^2 dt}$$

$$\sigma_\omega = \sqrt{\frac{1}{E}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\omega_m)^2\left|S(\omega)\right|^2 d\omega}$$

Jestliže je pak signál x(t) dobře lokalizovaný v čase, pak bude x(t) soustředěný kolem střední hodnoty t_m a směrodatná odchylka σ_t bude malá. Stejným způsobem lze popsat signál i ve frekvenční oblasti, kde dobrá lokalizace signálu znamená jeho koncentraci kolem hodnoty ω_m s malou směrodatnou odchylkou σ_ω.

Lokalizace v časo-frekvenční oblasti

V případě časo-frekvenční oblasti bude signál dobře lokalizován, pokud bude malý součin $\sigma_t\,\sigma_\omega$. Důležitou vlastností součinu je, že není závislý na změně časového měřítka, tedy:

$$\sigma_t(x(at)) = \frac{1}{|a|}\sigma_t(x(t))$$

$$\sigma_\omega(x(at)) = |a|\sigma_\omega(x(t))$$

Z výše uvedených vztahů pro součin směrodatných odchylek $\sigma_t\,\sigma_\omega$ vyplývá

$$\sigma_t\sigma_\omega(x(at)) = \sigma_t\sigma_\omega(x(t))$$

Lokalizace v časo-frekvenční oblasti

Jinými slovy, pokud se bude zjemňovat časové měřítko, resp. |a|>1, pak se musí zhoršovat frekvenční rozlišení a naopak.

Samotný Heisenberg-Gaborův princip neurčitosti je popsán následující nerovností

$$\sigma_t \sigma_f \geq \frac{1}{2}$$

Tato nerovnost se stává rovností pro gaussovský puls, který není ohraničen ani v čase ani ve frekvenci. Pro všechny ostatní signály platí nerovnost.

Princip neurčitosti - závěry

The time-bandwidth product theorem, or Uncertainty Principle, is a fundamental statement regarding Fourier transform pairs.

Leon Cohen : Time Frequency Analysis

Uncertainty principle is a Mathematical Artifact in data analysis using Fourier Transform.

Norden Huang : HHT

HILBERTOVA TRANSFORMACE A ANALYTICKÝ SIGNÁL

Hilbertova transformace

- Jednou z možností jak perfektně popsat vývoj frekvence obsažené v

  nestacionárním signálu je výpočet okamžité frekvence

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt}$$

- Kde Φ(t) je okamžitá fáze signálu. Uvažujme komplexní signál z(t) = x(t)+jy(t).
- Tento signál lze také zapsat v polárních souřadnicích

$$z(t) = A(t) e^{j\phi(t)}$$

Hilbertova transformace

- A(t) je okamžitá amplituda komplexního signálu a používá se při obálkové analýze. Problém je, že takto definovanou okamžitou frekvenci nelze jednoduše vypočítat pro reálné signály, jelikož neznáme jejich imaginární části. Jednou z možností, jak elegantně vypočítat komplexní signály ze signálů reálných je použití Hilbertovy transformace. Reálná a imaginární část komplexního signálu jsou spojeny vztahem

$$y(t) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau$$

- Imaginární část signálu tedy lze vypočítat konvolucí

$$y(t) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

Hilbertova transformace

- Komplexní signál můžeme zapsat ve tvaru

$$z(t) = x(t) + \frac{j}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau} d\tau = x(t) + j\mathrm{H}\{x(t)\}$$

- Takto definované signály jsou známé jako analytické signály. U těchto signálů jsou velice důležité jejich spektrální vlastnosti. Pro Fourierovy transformaci signálu y(t) platí

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) * \frac{1}{\pi t} \right] e^{-j\omega t} dt = X(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt$$

Hilbertova transformace

- Fourierova transformace funkce $\frac{1}{\pi t}$ je rovna

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi t} e^{-j\omega t} dt = \operatorname{sgn}(\omega)$$

$$\Downarrow$$

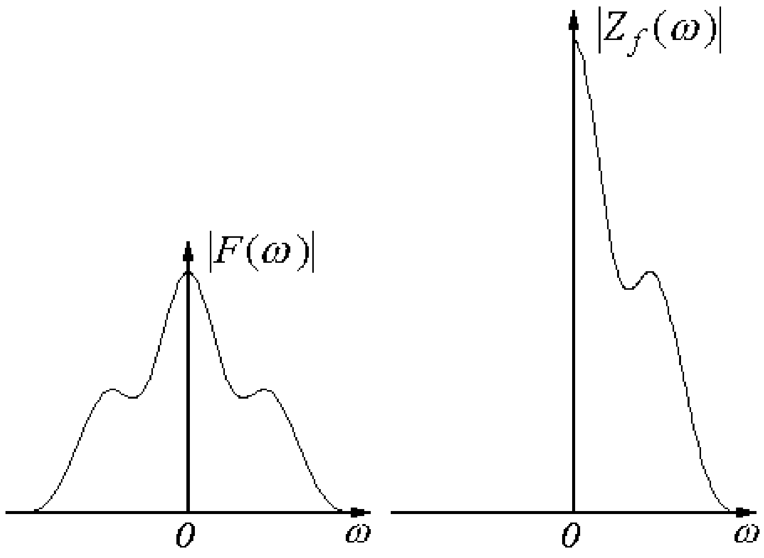
$$Y(\omega) = X(\omega)\operatorname{sgn}(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$Z(\omega) = X(\omega) + X(\omega)\operatorname{sgn}(\omega)$$

Hilbertova transformace

- Z poslední rovnice plyne, že Fourierova transformace analytických signálů je pro záporné frekvence nulová, a nabývá dvojnásobné hodnoty pro kladné frekvence



Hilbertova transformace

- Klasická metoda výpočtu Hilbertovy transformace vychází z rovnice pro spektrum imaginární části signálu

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\left(-j\,\mathrm{sgn}(\omega)\right) e^{j\omega t} d\omega$$

- Význam okamžité frekvence bude podrobněji vysvětlen v přednášce Hilbert-Huangova transformace

Hilbertova transformace

$$y(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t-\tau}\, d\tau$$

- y(t) *je Hilbertova transformace signálu* x(t)
- *z(t) je analytický Signál*

$$z(t) = x(t) + j \cdot y(t) = A(t) \cdot e^{j \cdot \theta(t)}$$

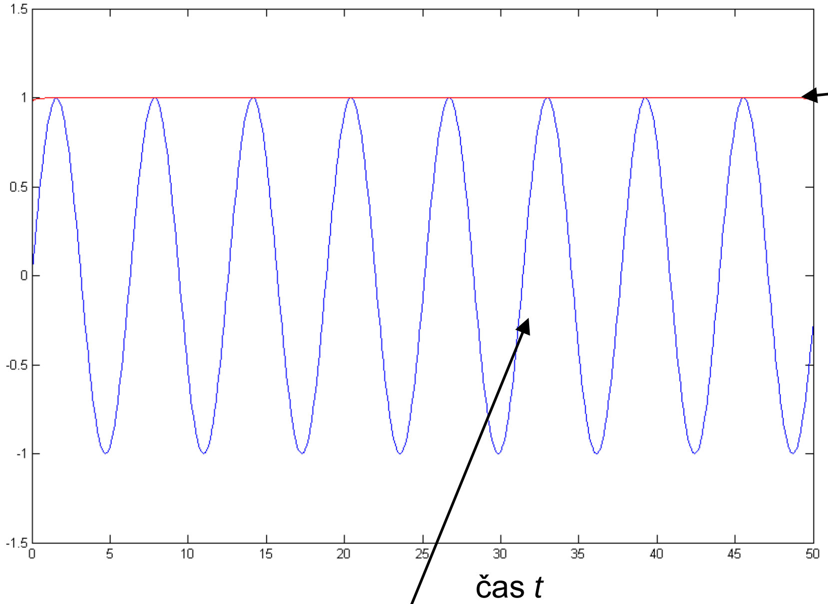
- *A(t) je obálka signálu x(t) a ϑ(t) je Okamžitá frekvence signálu x(t)*

$$A(t) = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$$

- *„okamžitá frekvence" je derivací fáze ϑ(t)*

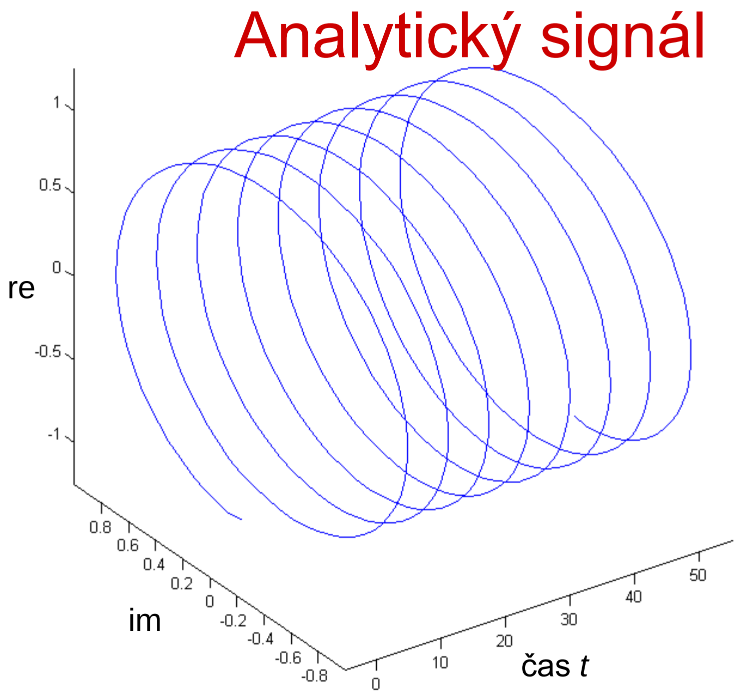
$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{y(t)}{x(t)}\right) \qquad \omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Analytický signál



$$A(t) = \sqrt{X^2(t) + Y^2(t)}$$

$$x(t) = \sin(t)$$



WIGNER-VILLEOVA DISTRIBUCE

Energie signálu

- Wigner-Villeova distribuce slouží k popisu rozložení energie signálu v časo-frekvenční rovině.
- Klasická definice

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 \, df$$

- $|x(t)|^2$, resp. $|X(f)|^2$ lze chápat jako hustoty energie v časové, resp. frekvenční oblasti $\Longrightarrow$ definice pomocí sdružené hustoty energie signálu

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f) \, dt df$$

Sdružená hustota energie signálu

- Sdružená hustota musí splňovat podmínky

1. $$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f)\, dt = |X(f)|^2$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} \rho_x(t, f)\, df = |x(t)|^2$$

- Tedy $|x(t)|^2$ a $|X(f)|^2$ lze tedy chápat jako marginální hustoty energie signálu.
- Další podmínky kladené na hustotu energie $\rho_x(t, f) \in \Re^2$

3. Hustota energie může nabývat pouze reálných hodnot

Vlastnosti hustoty energie

4. Pokud je $x(t)=0$ pro $t\in\langle t_1,t_2\rangle$, potom

$$\rho_x(t,f)=0,\quad t\in\langle t_1,t_2\rangle$$

5. Pokud je $X(f)=0$ pro $f\in\langle f_1,f_2\rangle$, potom

$$\rho_x(t,f)=0,\quad f\in\langle f_1,f_2\rangle$$

6. Hustota energie musí být pozitivně semidefinitní

$$\rho_x(t,f)\geq 0$$

Funkce splňující body 1 – 5 se obecně nazývají distribuce energie.

Wigner-Villeova distribuce

- Wignerova distribuce

$$WD(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} x\left(t+\frac{\tau}{2}\right)x\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

- Wigner-Villeova distribuce

$$WVD(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} z\left(t+\frac{\tau}{2}\right)z^{*}\left(t-\frac{\tau}{2}\right)e^{-j2\pi f\tau}d\tau$$

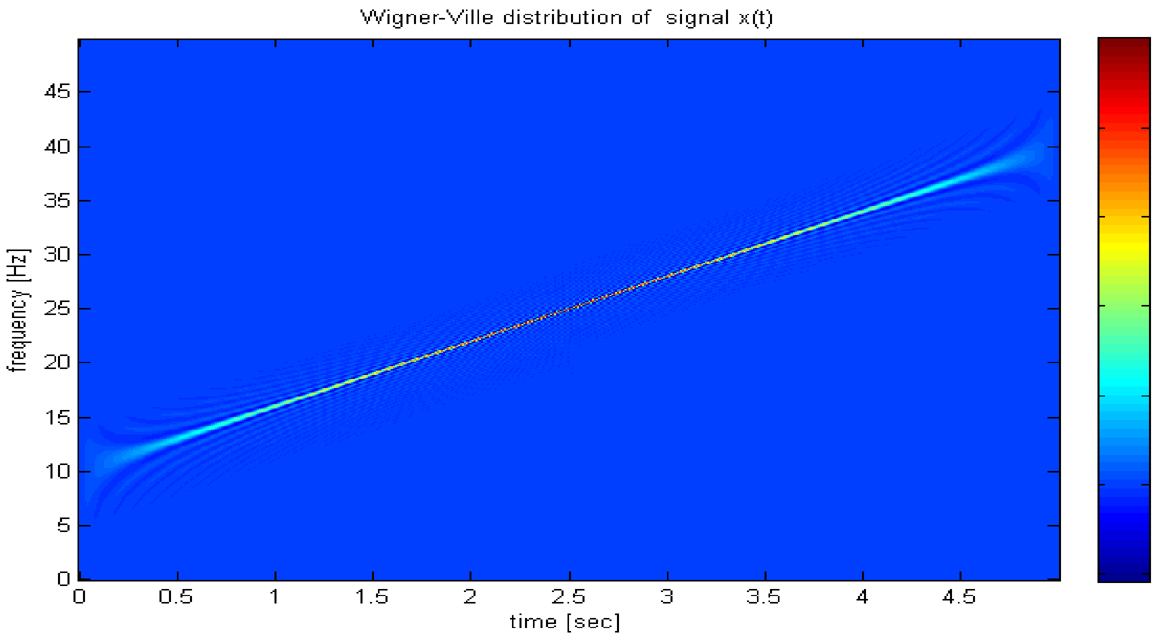
- z(t) je analytický signál odvozený od reálného signálu x(t)

$$z(t)=x(t)+j\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$$

WVD – příklad 1

- Uvažujme signál, jehož frekvence se mění lineárně od 10 Hz do 40 Hz.

$$x(t) = \sin\left(2\pi\int_0^t \omega(\tau)\,d\tau\right)$$

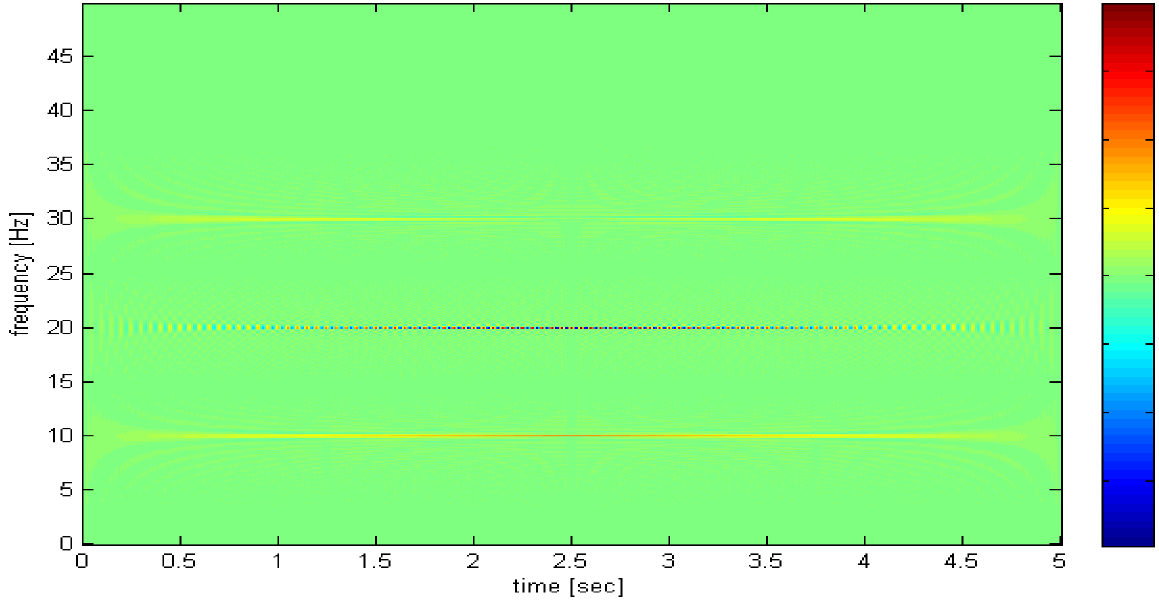


Velmi dobrá lokalizace v časové i frekvenční oblasti.

WVD – příklad 2

- Nyní uvažujme harmonický signál se dvěmi frekvenčními složkami 10 a 30 Hz.

$$x(t) = \sin(2\pi 10t) + \sin(2\pi 30t)$$



Místo 2 frekvenčních linií vidíme 3. Jak to?

Interferenční jevy

$$z(t) = A_1 e^{j2\pi f_1 t} + A_2 e^{j\pi f_2 t}$$

Po dosazení do rovnice pro výpočet WVD

$$WVD(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_1 e^{j2\pi f_1\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} + A_2 e^{j2\pi f_2\left(t+\frac{\tau}{2}\right)} \right] \left[A_1 e^{-j2\pi f_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} + A_2 e^{-j2\pi f_2\left(t-\frac{\tau}{2}\right)} \right] e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

Tento výraz se dá jistými úpravami upravit na zjednodušený tvar

$$WVD(t,f) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ A_1^2 e^{j2\pi f_1 \tau} + A_2^2 e^{j2\pi f_2 \tau} + 2A_1 A_2 \cos\left[2\pi(f_1 - f_2)t\right] e^{j2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)\tau} \right\} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(A_1^2 e^{j2\pi f_1 \tau} + A_2^2 e^{j2\pi f_2 \tau} \right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau + 2A_1 A_2 \cos\left[2\pi(f_1 - f_2)t\right] \int_{-\infty}^{\infty} e^{j2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)\tau} e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

První dva členy pochází od dvou frekvenčních komponent signálu. Třetí člen je interferenční.

Interferenční jevy

První dva členy předchozího vztahu odpovídají dvěma složkám signálů s různou frekvencí. Třetí člen odpovídá Fourierově transformaci signálu s frekvencí

$$\frac{f_1 + f_2}{2}$$

Tyto jevy ovlivňují možnost správné interpretace výsledků získaných z WVD. Pro tento jednoduchý příklad jsou Fourierovy koeficienty interferenčního jevu váženy členem

$$2A_1A_2\cos\left[2\pi\left(f_1 - f_2\right)t\right]$$

Navíc je vidět, že je tato amplituda modulována funkcí kosinus s frekvencí

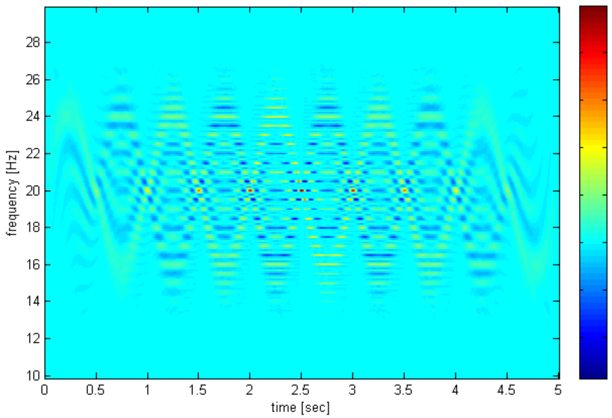
$$\frac{f_1 - f_2}{2}$$

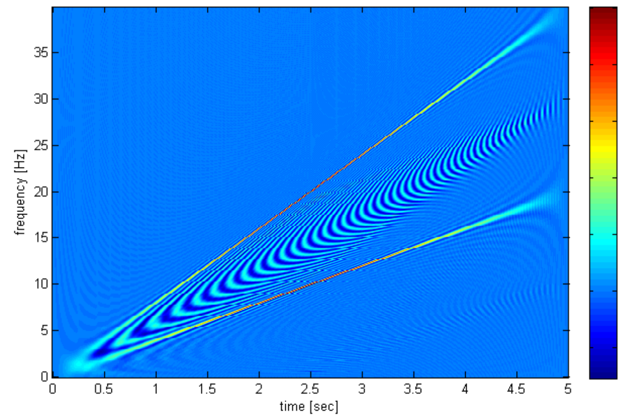
Interferenční jevy

- Pokud je signál složen ze dvou komponent $x_1(t)$ a $x_2(t)$, pak pro $WVD_{x1(t)+x2(t)}$
- obecně platí

$$WVD_{x_1(t)+x_2(t)}(t,f) = WVD_{x_1(t)}(t,f) + WVD_{x_2(t)}(t,f) + 2\,\mathrm{Re}\left\{W_{x_1(t),x_2(t)}(t,f)\right\}$$

- Typy interferenční jevů:
- Vnitřní – Vznikají u nelineárně frekvenčně modulovaných signálů.
- Vnější – Vznikají vzájemným působením dvou komponent signálu.



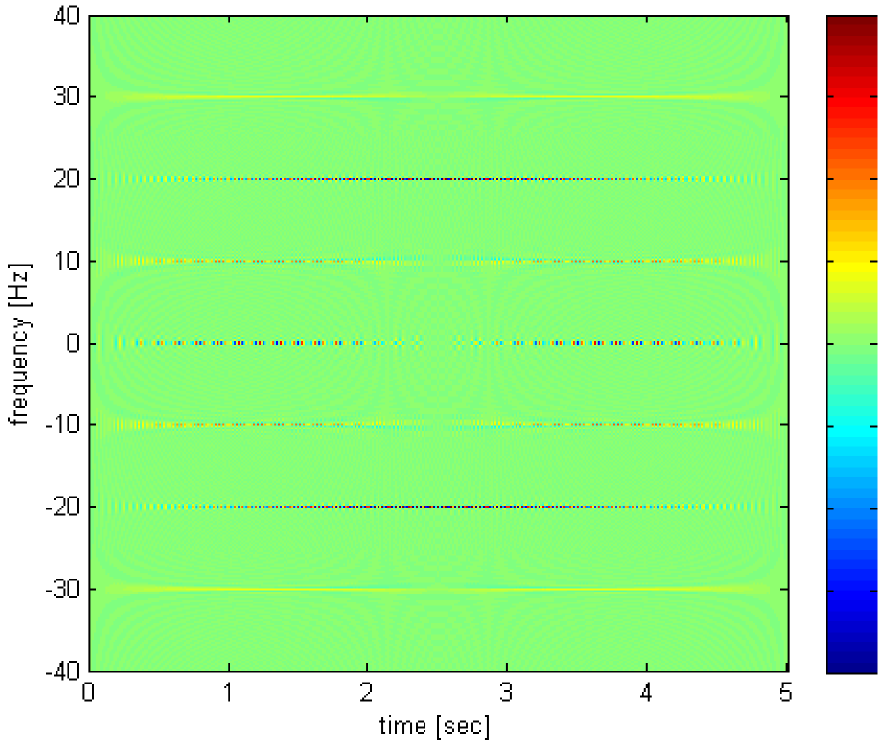


Interferenční jevy

- Obecnou snahou je snížit počet a velikost interferenčních jevů. Z tohoto důvodu se při výpočtu WVD používá analytický signál místo reálného.

Při použití reálného signálu vznikne vzájemnou interakcí N komponent signálu N*(2N-1) interferenčních jevů. V tomto příkladu 6.

Pro analytické signály platí, že spektrum v záporných frekvencích je nulové a počet interferenčních jevů je snížen na N*(N-1)/2.



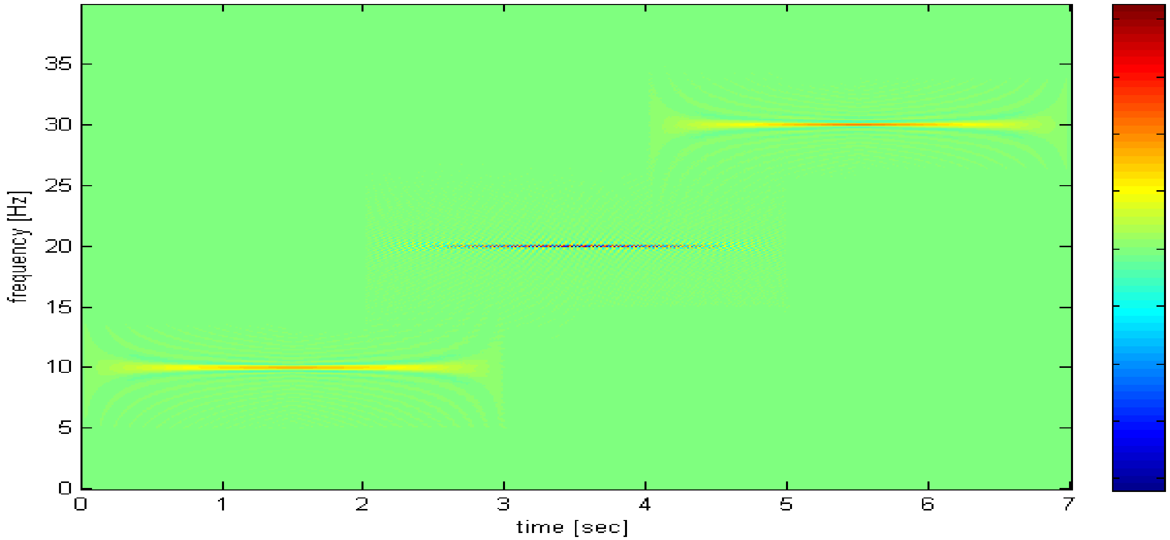
Interferenční jevy

- Pokud se signál skládá ze dvou harmonických signálů

$$x_1(t)\begin{cases}\neq 0, & t\in\langle t_1,t_2\rangle\\ =0, & t\notin\langle t_1,t_2\rangle\end{cases}\qquad x_2(t)\begin{cases}\neq 0, & t\in\langle t_3,t_4\rangle\\ =0, & t\notin\langle t_3,t_4\rangle\end{cases}$$

- potom

$$WVD_{x_1,x_2}(t,f)\neq 0,\quad t\in\left\langle \frac{t_1+t_3}{2},\frac{t_2+t_4}{2}\right\rangle$$



Pseudo Wigner-Villeova distribuce

- Pseudo Wigner-Villeova distribuce:

$$PWVD_x(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, z\left(t+\frac{\tau}{2}\right) z^*\left(t-\frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau}\, d\tau$$

- Tato rovnice odpovídá filtraci $WVD_x(t,f)$ ve frekvenční oblasti

$$PWVD_x(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} H(f-\xi)\, WVD_x(t,\xi)\, d\xi$$

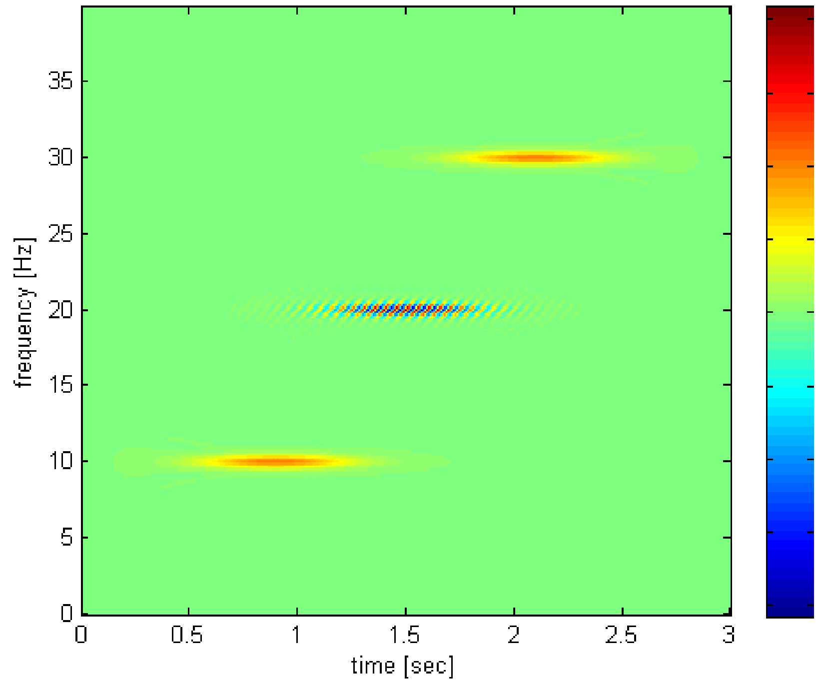
- Podobně jako u Fourierovy transformace, krátké okno způsobí dobré rozlišení v časové oblasti ale špatné ve frekvenční oblasti, naopak tomu je u dlouhého okna.

PWVD – příklad 1

- Uvažujme následující příklad

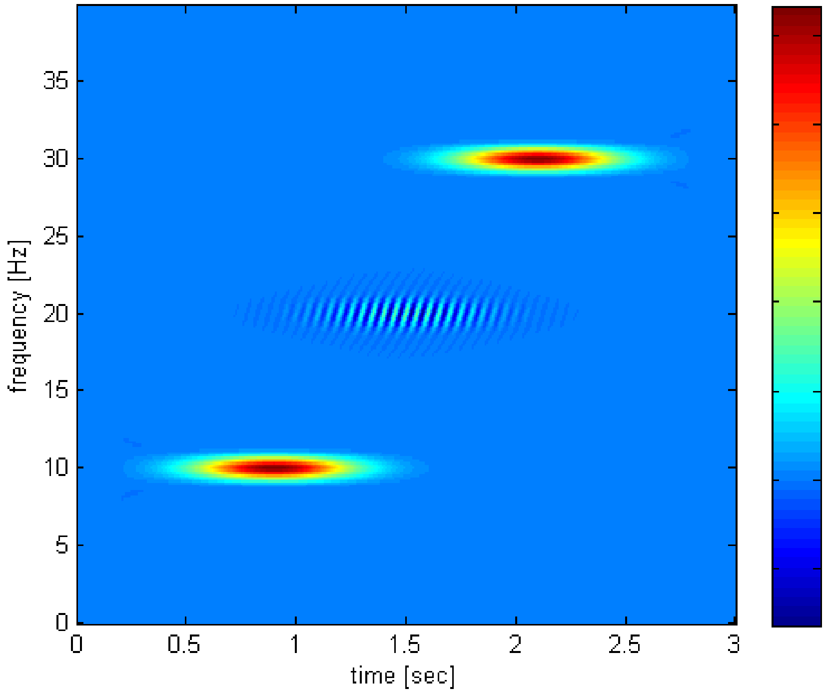
$$x(t) = e^{-4(t-0.9)^2}\sin(2\pi 10t) + e^{-4(t-2.1)^2}\sin(2\pi 30t)$$

Počet vzorků signálu N = 3001. Při použití WVD je interferenční člen jasně patrný. PWVD – snížení interferenčních členů za cenu ztráty frekvenčního rozlišení

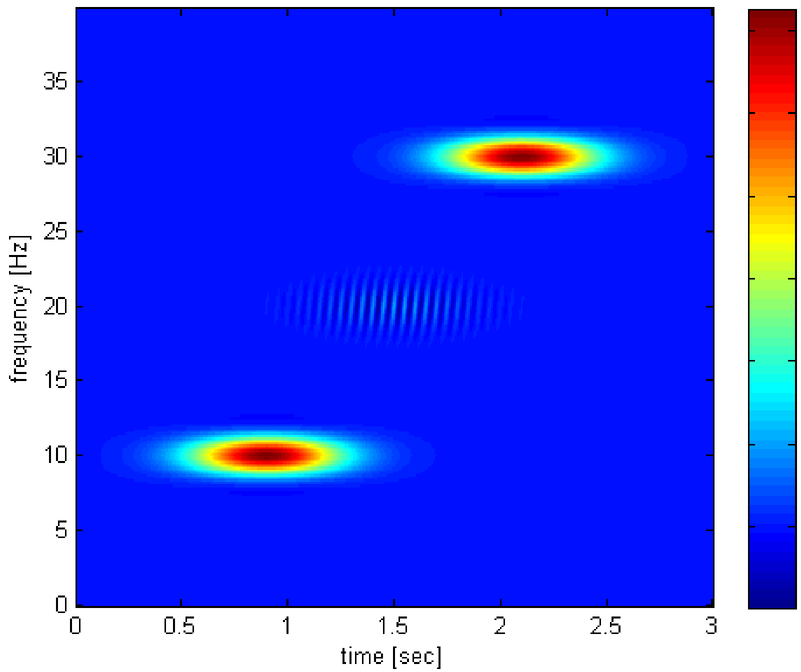


PWVD – příklad 1

Nh = 1001



Nh = 501

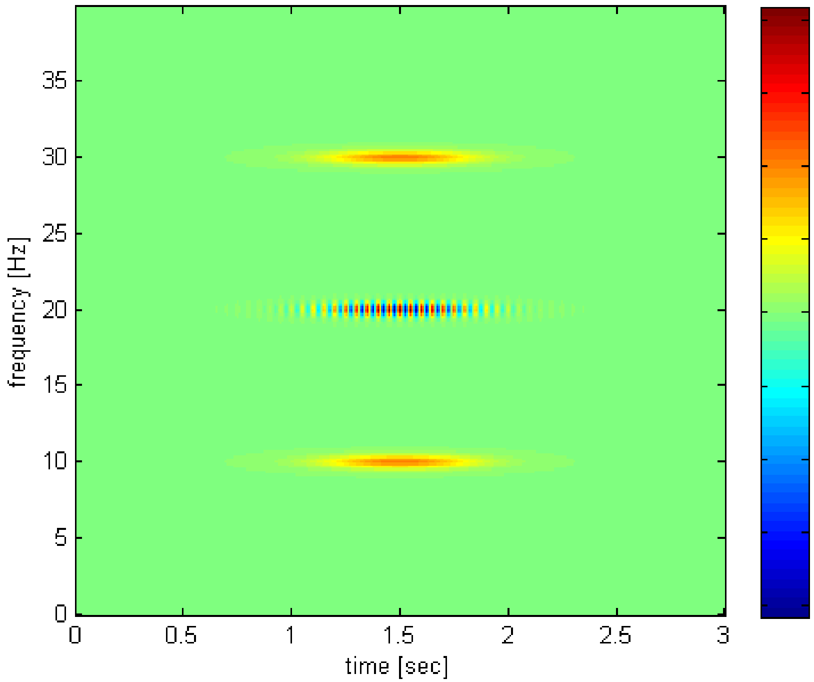


PWVD – příklad 2

- Uvažujme následující příklad

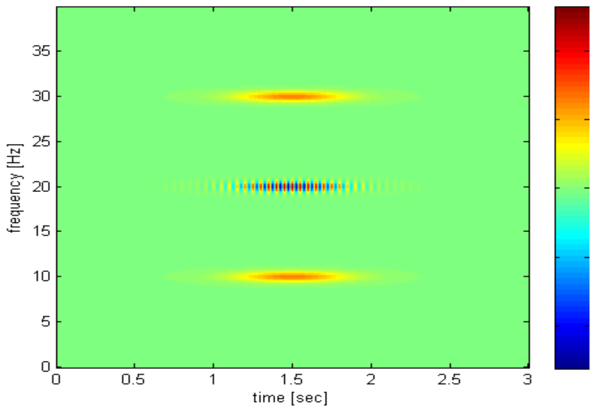
$$x(t) = e^{-4(t-1.5)^2} \sin(2\pi 10t) + e^{-4(t-1.5)^2} \sin(2\pi 20t)$$

Počet vzorků signálu N = 3001. Lze použít PWVD pro snížení interferenčních členů?

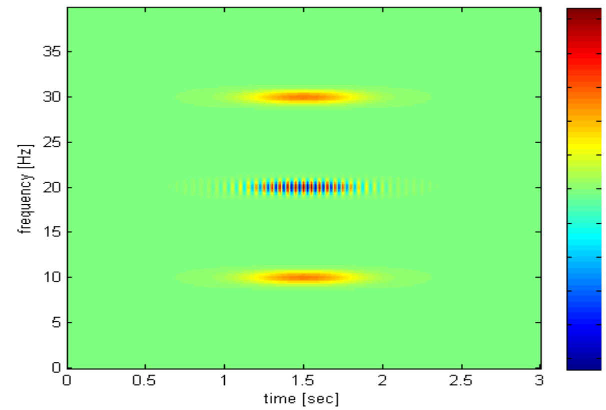


PWVD – příklad 2

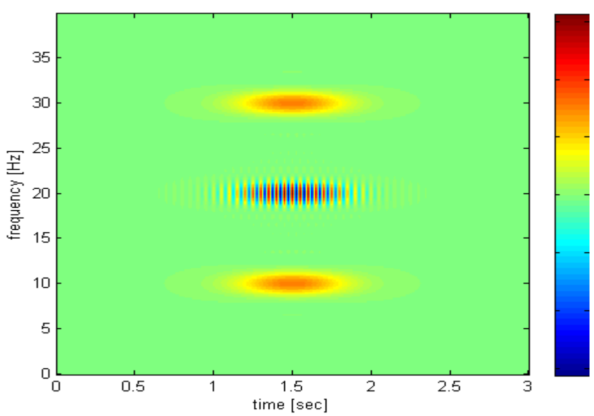
Nh = 1501



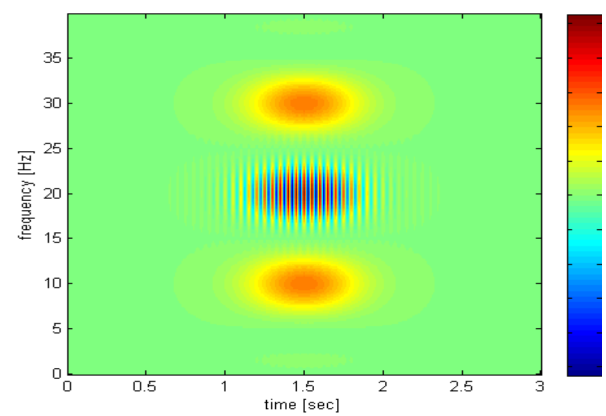
Nh = 1001



Nh = 501



Nh = 201



Vyhlazená pseudo Wigner-Villeova distribuce

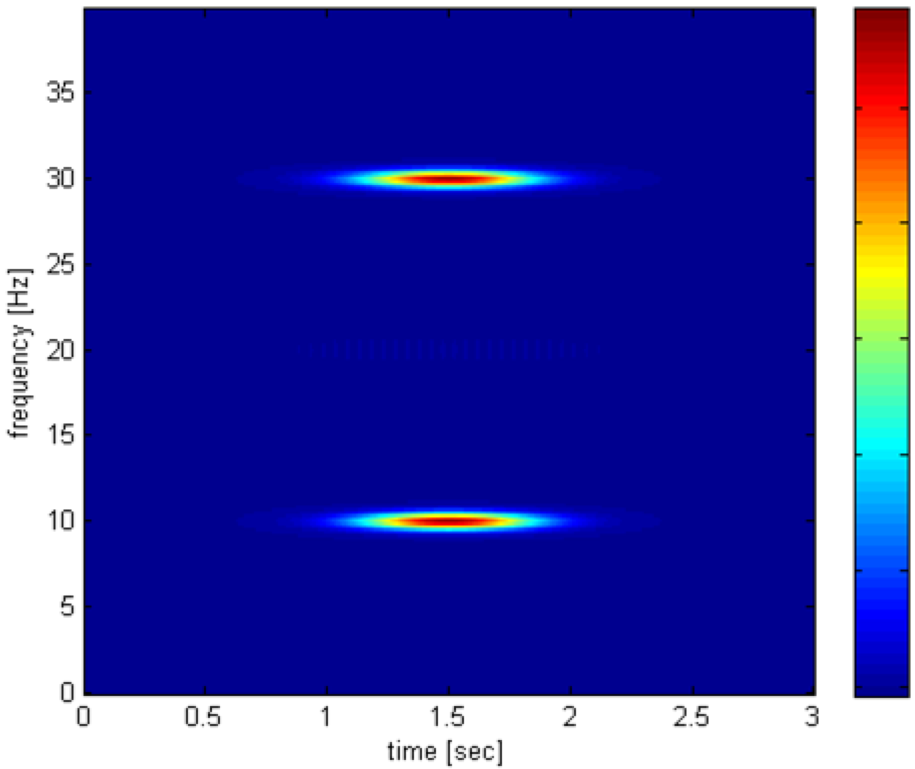
- Vyhlazená pseudo Wigner-Villeova distribuce

$$SPWVD(t,f)=\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\int_{-\infty}^{\infty} g(s-t)\,z\left(s+\frac{\tau}{2}\right)z^{*}\left(s-\frac{\tau}{2}\right)ds\; e^{-j2\pi f\tau}\,d\tau$$

- Filtrace (vyhlazení) v časové i frekvenční oblasti pomocí dvou nezávislých okénkových funkcí.
- g(t) = filtrace v časové oblasti
- h(t) = filtrace ve frekvenční oblasti

Vyhlazená pseudo Wigner-Villeova distribuce

- Při použití filtrace v časové oblasti lze snížit vliv interferenčních jevů v předchozím příkladu.



SPWVD – příklad 1

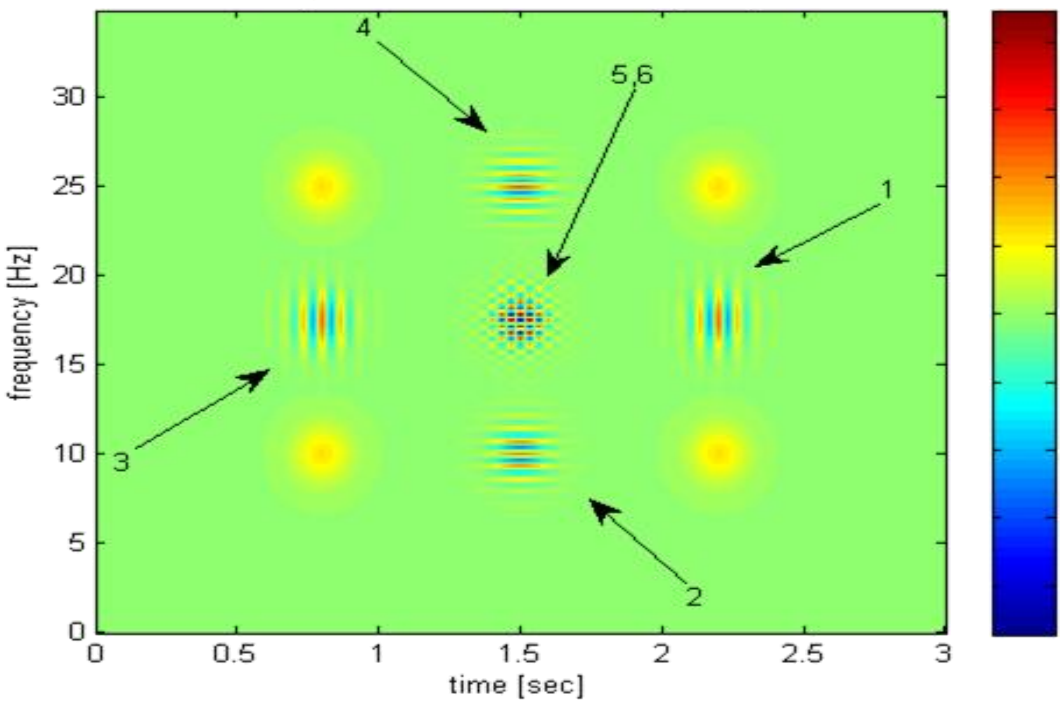
- Uvažujme následující příklad

$$x(t)=e^{-\left[\frac{(t-0.8)^2}{0.02}+j2\pi 10(t-0.8)\right]}+e^{-\left[\frac{(t-0.8)^2}{0.02}+j2\pi 25(t-0.8)\right]}+e^{-\left[\frac{(t-2.2)^2}{0.02}+j2\pi 10(t-2.2)\right]}+e^{-\left[\frac{(t-2.2)^2}{0.02}+j2\pi 25(t-2.2)\right]}$$

4 frekvenční komponenty

$\Longrightarrow$

6 interferenčních komponent

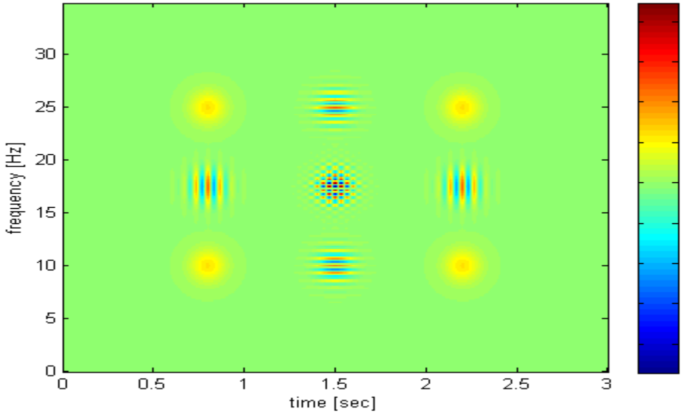


SPWVD – příklad 1

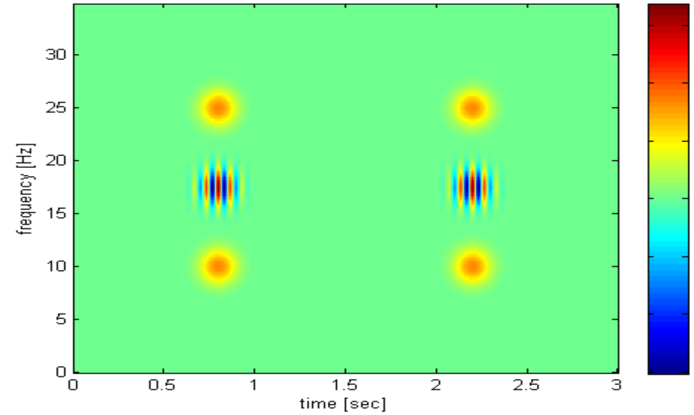
- Snížení interferenčních jevů souvisí s jejich geometrií – viz. příklad 5.
- Komponenty 1 a 3 nelze odstranit pouhou filtrací ve frekvenční oblasti.
- Komponenty 2 a 4 nelze odstranit pouhou filtrací v časové oblasti.
- Komponenty 5 a 6 lze odstranit filtrací v libovolné oblasti.

SPWVD – příklad 1

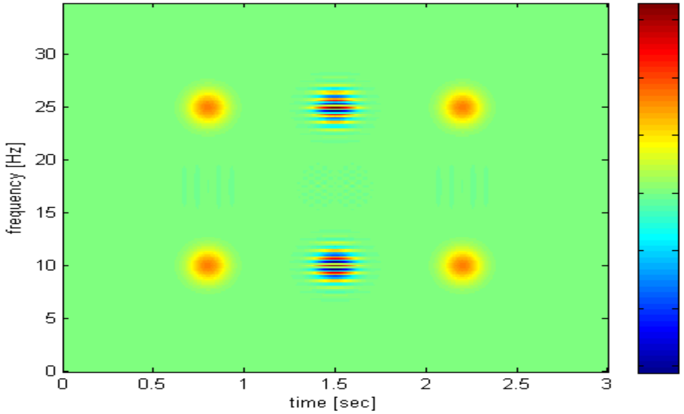
WVD



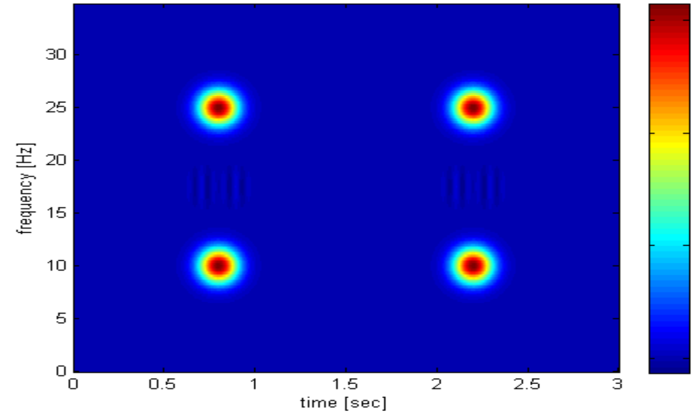
filtrace ve frekvenční oblasti



filtrace v časové oblasti



časo-frekvenční filtrace



WAVELET TRANSFORMACE

Wavelety

Waveletová transformace se řadí mezi časo-škálové reprezentace. Rozklad signálu není prováděn na základě změny frekvence bázové funkce, ale na základě výpočtu korelace mezi signálem a waveletovou funkcí s proměnnou šířkou a pozicí. Základní waveletová funkce se nazývá mateřská. Aby funkce mohla být považována za wavelet musí splňovat tyto podmínky:

- musí být energeticky omezená

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\psi(t)\right|^2 dt < \infty$$

- musí mít stejnosměrnou složku nulovou

  - označme $\Psi(f)$ fourierovu transformaci waveletové funkce $\psi(t)$

$$\Psi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Wavelety

pak musí existovat tzv. konstanta přípustnosti

$$C_g = \int_0^{\infty} \frac{\left|\Psi(f)\right|^2}{f} df < \infty$$

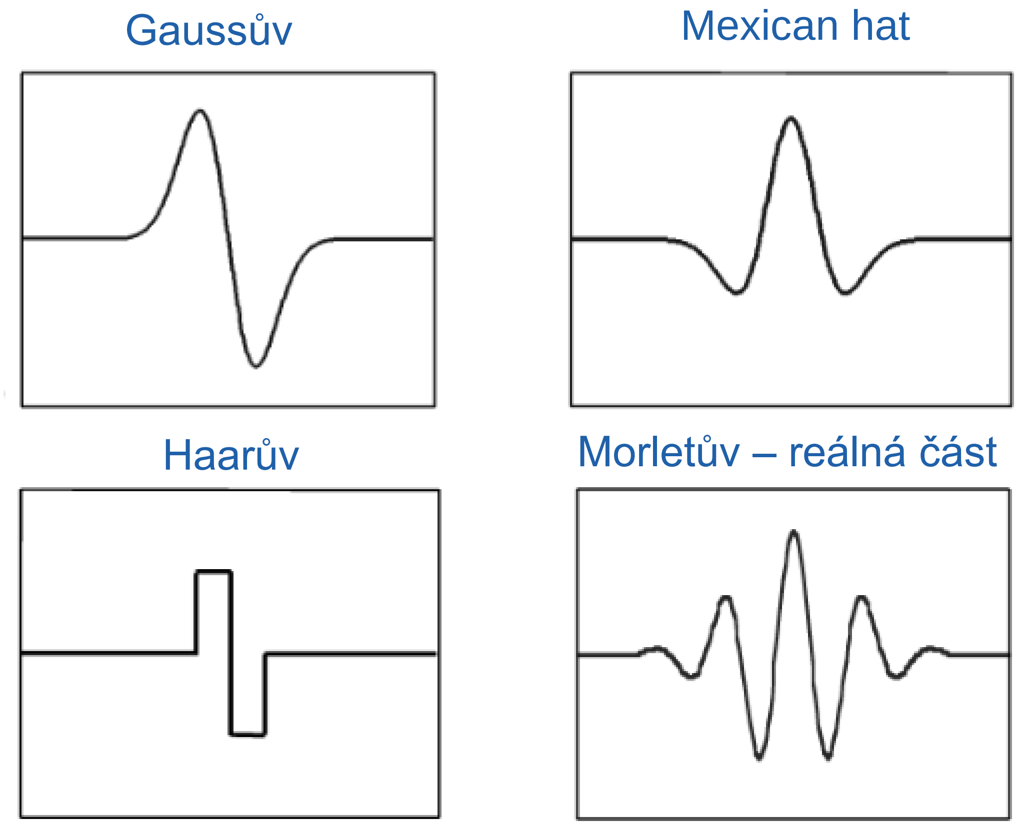
z toho však plyne

$$\Psi(0) = 0$$

Pro diskrétní waveletovou transformaci musí wavelety splňovat také podmínku ortogonality.

Wavelety

- Některé wavelety

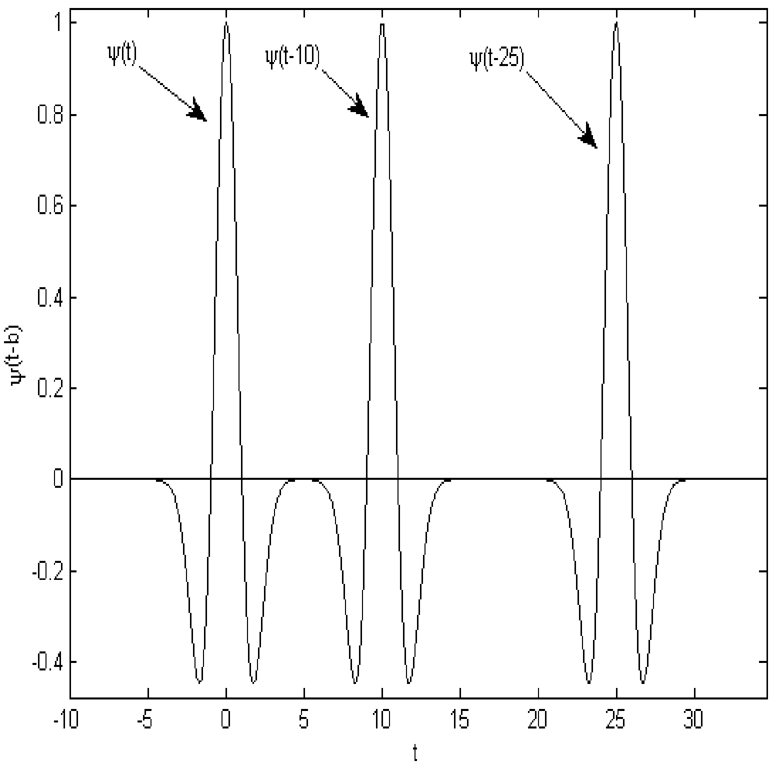


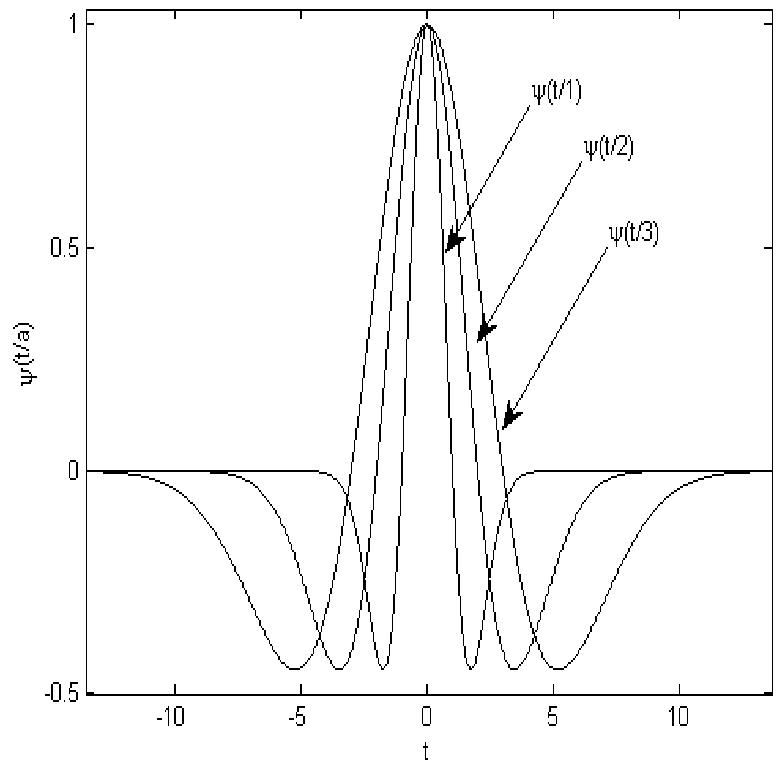
Spojitá waveletová transformace

- Spojitá waveletová transformace je definována vztahem:

$$T(a,b) = w(a)\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$$

- kde w(a) je váhová funkce a parametry a, b jsou vlastními parametry waveletové funkce. Parametr b udává její posun po časové ose, a udává změnu jejího měřítka.


ψ(t)
ψ(t-10)
ψ(t-25)
ψ(t-b)
t
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-10
-5
0
5
10
15
20
25
30


ψ(t/1)
ψ(t/2)
ψ(t/3)
ψ(t/a)
t
1
0.5
0
-0.5
-10
-5
0
5
10

Mexican hat wavelet

- Mezi základní waveletové funkce patří tzv. Mexican hat wavelet:

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\left[1-\left(\frac{t-b}{a}\right)^2\right]e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}$$

- Dosazením a = b = 0 získáme mateřský wavelet. Aby energie waveletů na různých škálách byla stejná, volí se pro tento druh waveletů konstanta w(a)

$$w(a)=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

- Normalizovaná waveletová funkce se pak označuje

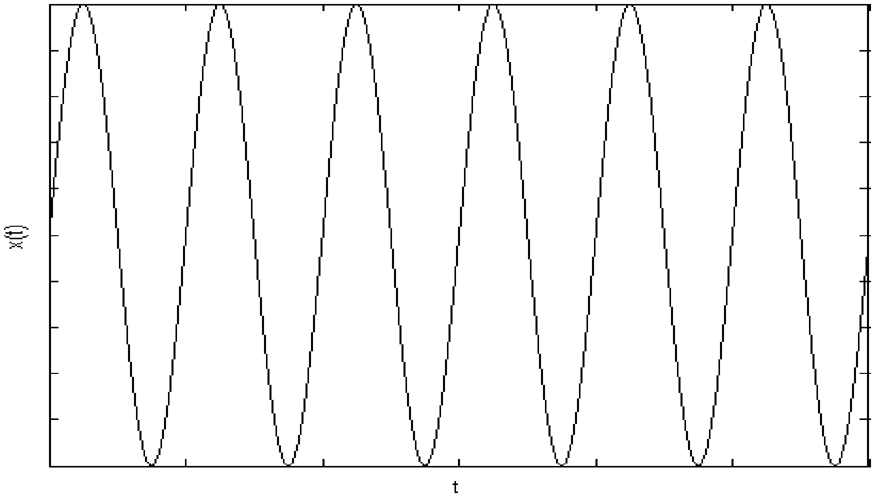
$$\psi_{a,b}(t)=\frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Jak to vlastně funguje?

- Aby bylo možné výsledky správně interpretovat, je důležité pochopit jak proces výpočtu vlastně funguje.

- Uvažujme, že budeme analyzovat harmonický signál.

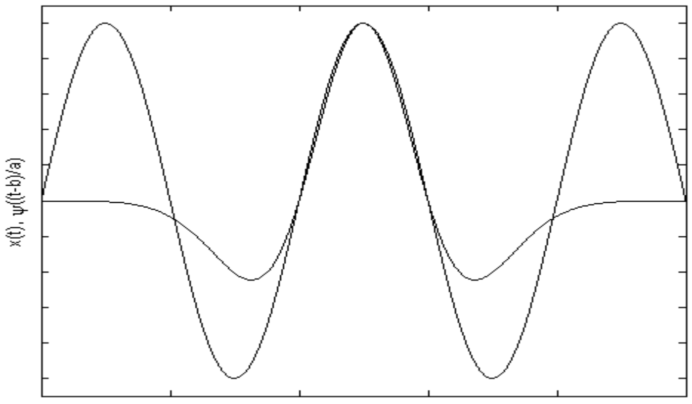
$$T(a,b) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi^{*}_{a,b}\,dt$$



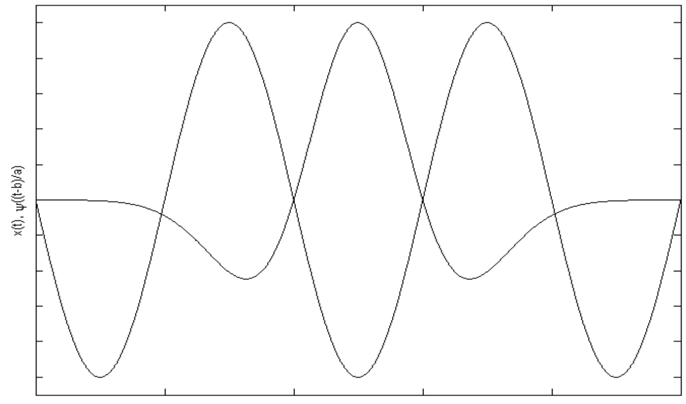
- výpočet podobnosti mezi funkcí
- x(t) a waveletem posunutým
- a dilatovaným příslušnými
- parametry.

Výpočet CWT

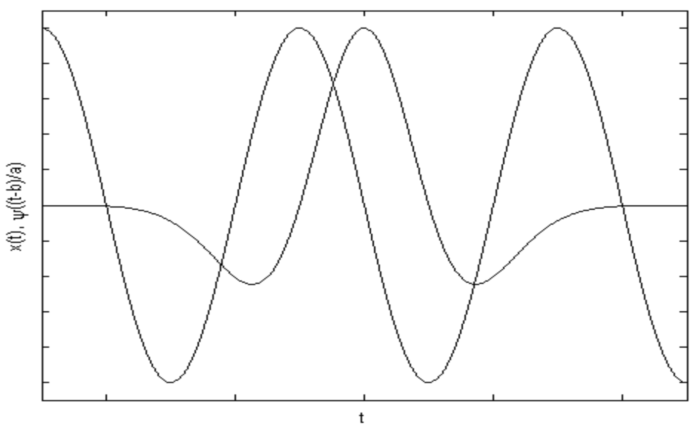
T(a,b) – velké kladné



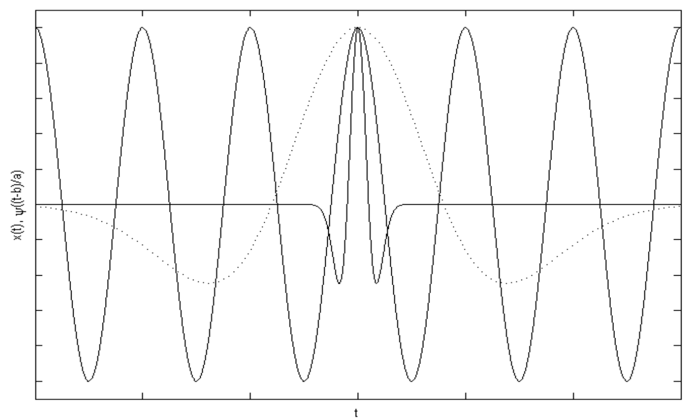
T(a,b) – velké záporné



T(a,b) – (téměř) nula



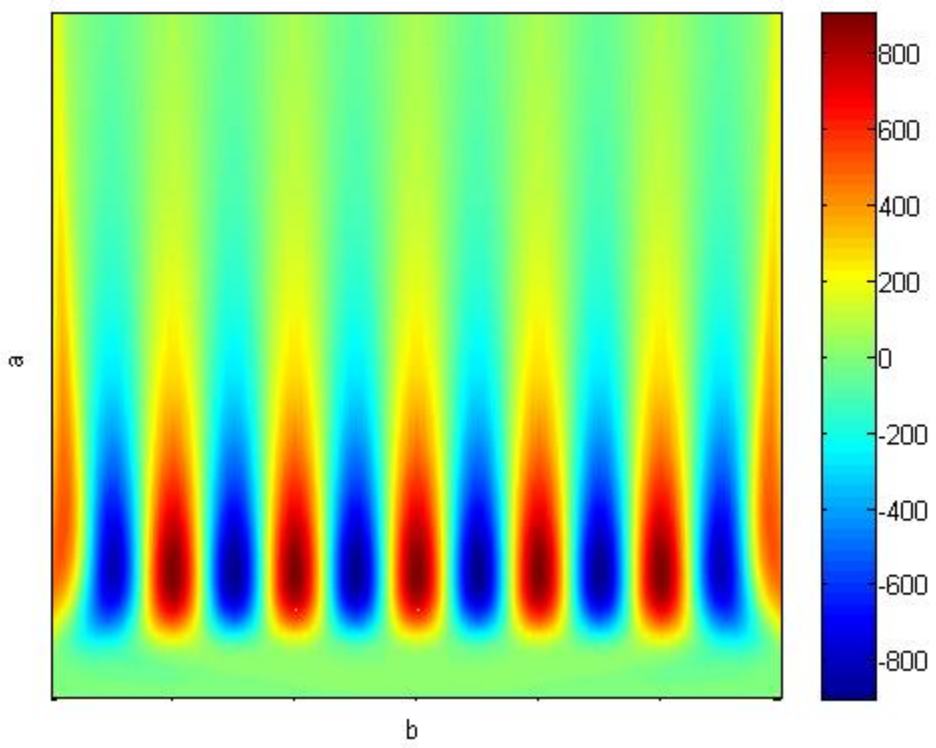
T(a,b) – (téměř) nula



Škálogram

Nikoho nemůže překvapit, že výsledkem analýzy pro různá a a b je pak

Podobně jako u krátkodobé Fourierovy analýzy lze výsledek zobrazit pomocí barevné škály. V literatuře se pak toto zobrazení nazývá škálogram – scalogram. Na ose Y je vynesen parametr a,neboli škála. Rozložení škály je ve většině případů logaritmické, ale může být i lineární.



Přepočet mezi škálou a frekvencí

- Jaký je vztah mezi škálou a frekvencí?
- Tento vztah nelze vyjádřit obecně pro všechny druhy waveletů, pro různé
- wavelety platí různé převody. Tyto převody přímo plynou z frekvenčního spektra daného waveletu. Uvažujme mateřský wavelet mexican hat

$$\psi(t) = \left(1 - t^2\right) e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Spektrální energie tohoto waveletu je

$$E(f) = \left|\Psi(f)\right| = 32\pi^5 f^4 e^{-4\pi^2 f^2}$$

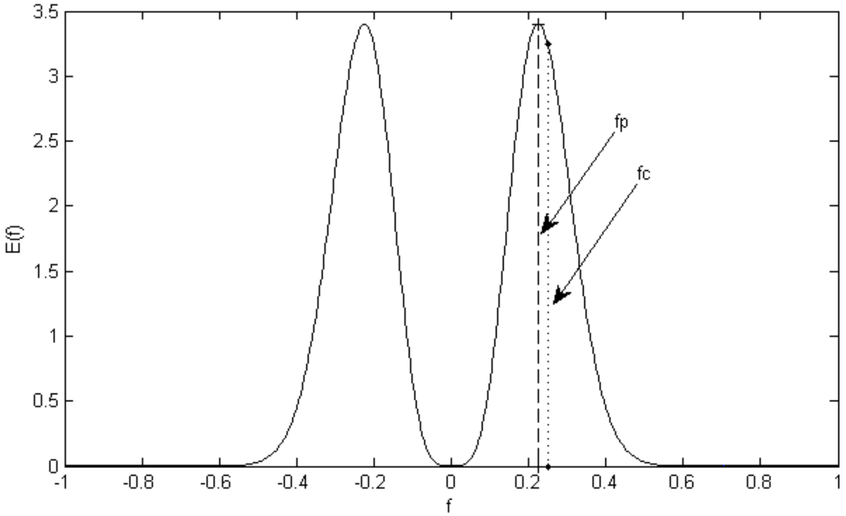
- Tato energie dosahuje svého maxima na frekvenci

$$f_p = \pm\sqrt{\frac{1}{2\pi^2}}$$

Přepočet mezi škálou a frekvencí

- frekvenci f_c lze vypočítat ze vztahu

$$f_c = \sqrt{\frac{\int_0^\infty f^2 \left|\Psi(f)\right|^2 df}{\int_0^\infty \left|\Psi(f)\right|^2 df}}$$



- Ze znalosti fc lze snadno vypočítat vztah mezi škálou a frekvencí

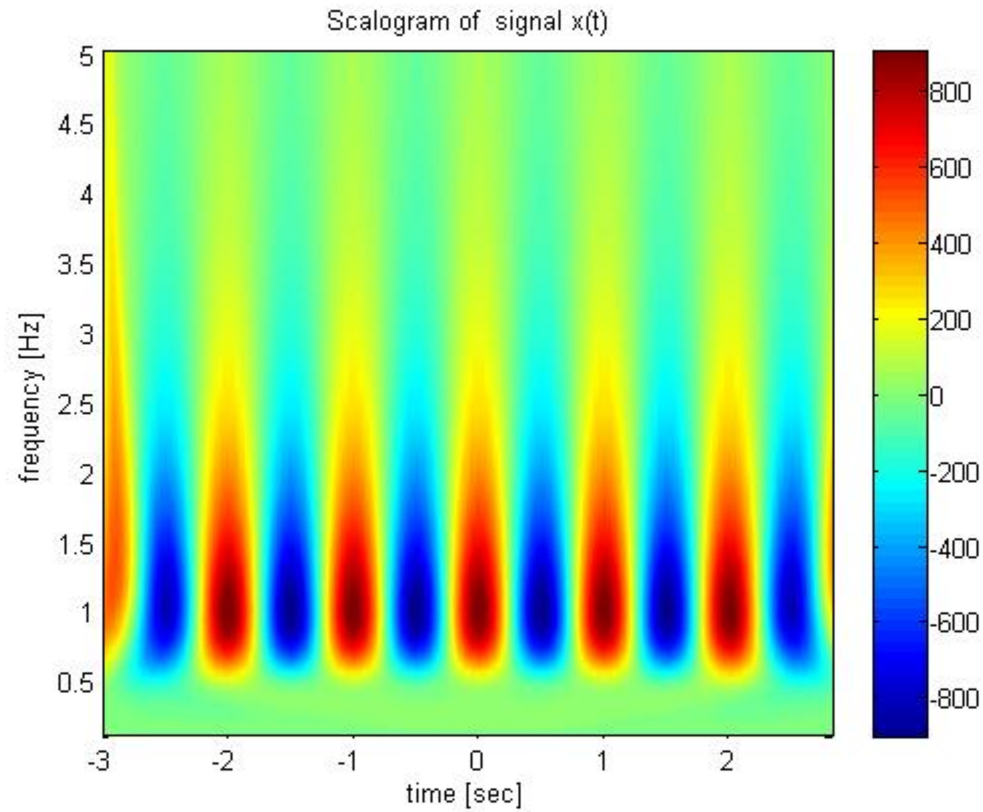
$$f = \frac{f_c}{a}$$

Přepočet mezi škálou a frekvencí

- Konkrétně pro mexican hat wavelet platí

$$f_c = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{5}{2}}$$

- Předpokádejme, že frekvence signálu v minulém příkladu byla 1 Hz. Pak můžeme škálogram vykreslit v závislosti na frekvenci

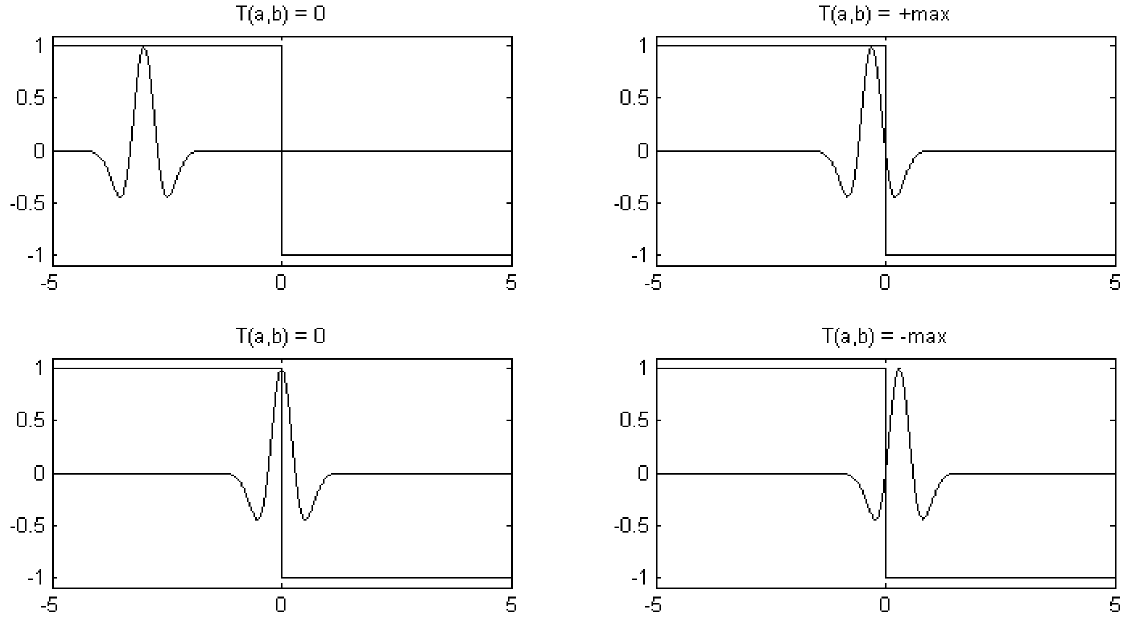


Signál s nespojitostí

- Dobrou vlastností waveletové analýzy je, že dokáže odhalit nespojitosti v signálu.

  Uvažujme tento signál

$$x(t)=\begin{cases} 1, & t \in <-5,0) \\ -1, & t \in <0,5> \end{cases}$$

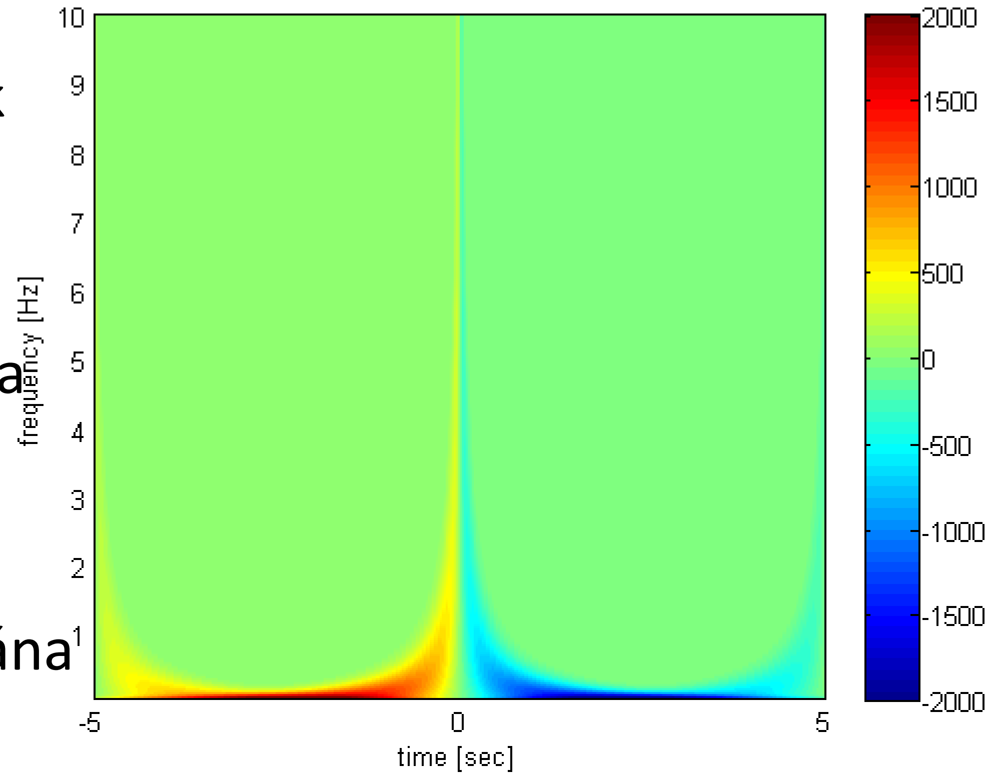


Škálogram signálu s nespojitostí

Předchozí úvahy jsou dobře zřejmé z grafického zobrazení škálogramu.

Z nulových hodnot dochází k plynulému nárůstu T(a,b) až do maxima, poté k poklesu do 0 a přechodu do minima a zpět do nuly.

Druhým závěrem je, že nespojitost je lépe lokalizována na vyšších frekvencích.



Morletův wavelet

- Morletův wavelet patří do skupiny komplexních waveletů

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}\left(e^{j2\pi f_0\frac{t-b}{a}}-e^{-\frac{(2\pi f_0)^2}{2}}\right)e^{-\frac{\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}{2}}$$

kde f_0 je tzv. centrální frekvence waveletu. Pro $f_0 >> 0$ je druhý výraz v závorce

téměř roven nule, výpočet se tedy nechá zjednodušit na tvar

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)=\frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}}e^{j2\pi f_0\frac{t-b}{a}}e^{-\frac{\left(\frac{t-b}{a}\right)^2}{2}}$$

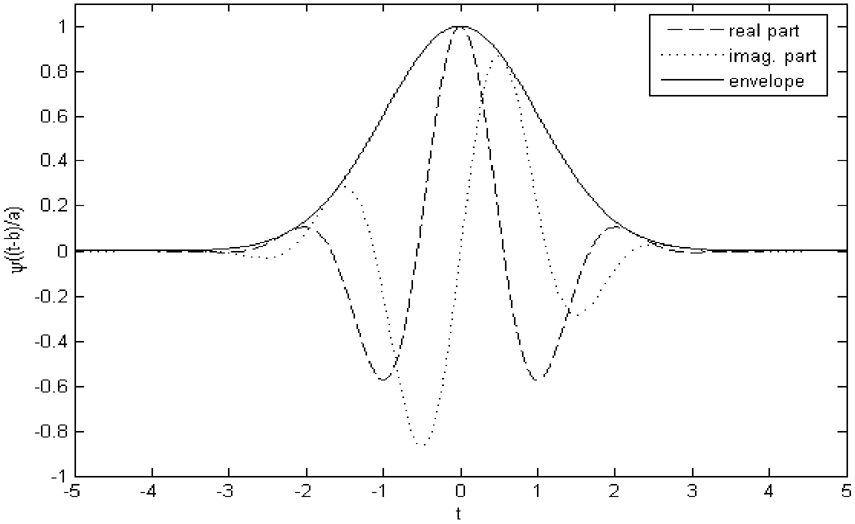
Morletův wavelet

- Při bližším pohledu na mateřský wavelet je zřejmé, že se jedná o komplexní exponencielu s frekvencí právě f_0, modulovanou gaussovským pulsem

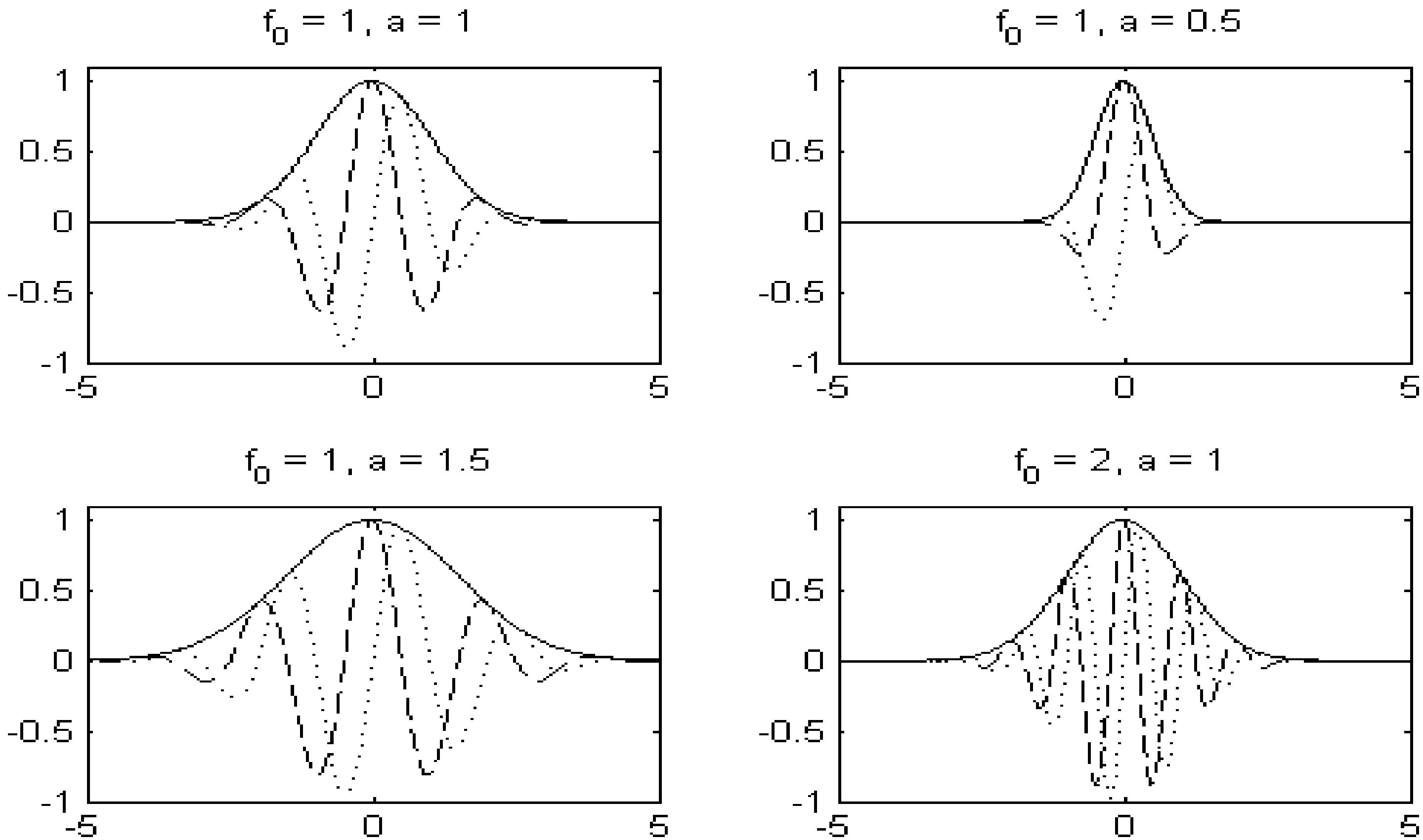
$$\psi(t) = \frac{1}{\pi^{\frac{1}{4}}} e^{j2\pi f_0 t} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Změnou škály získáme natažení nebo zúžení waveletu a změnou f_0 můžeme měnit frekvenci tlumených kmitů pod gaussovskou obálkou.

Použití komplexního waveletu umožňuje kromě amplitud vypočítat také fáze na různých škálách.



Morletův wavelet

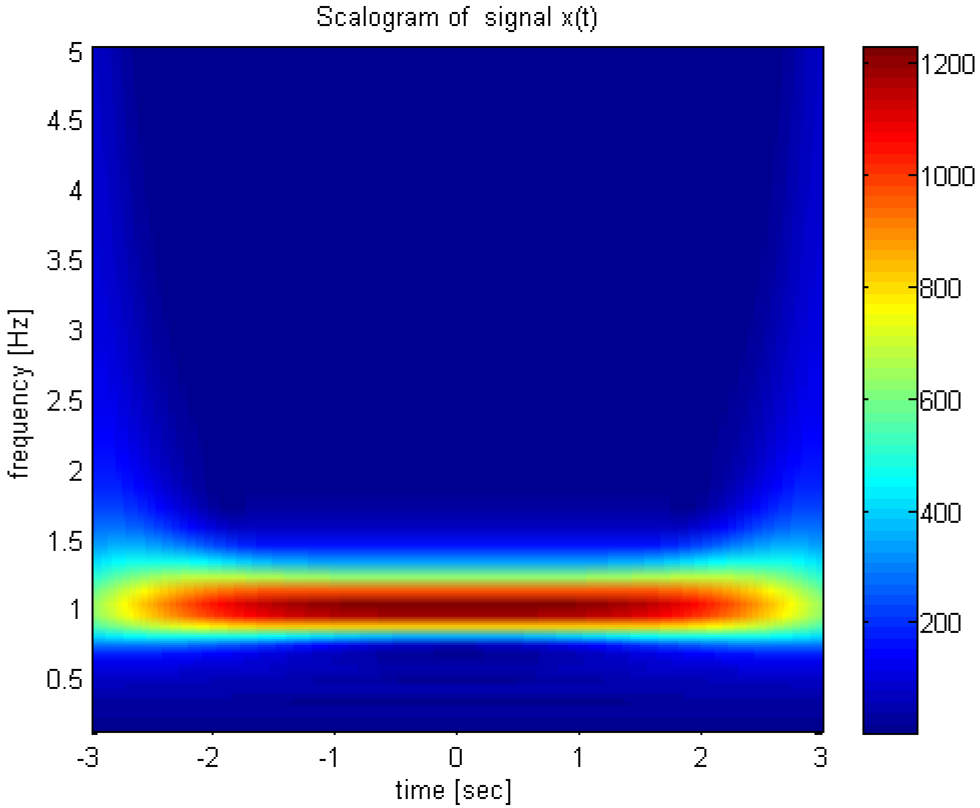


Přepočet mezi škálou a frekvencí

- Pro převod mezi škálo
a frekvencí platí vztah

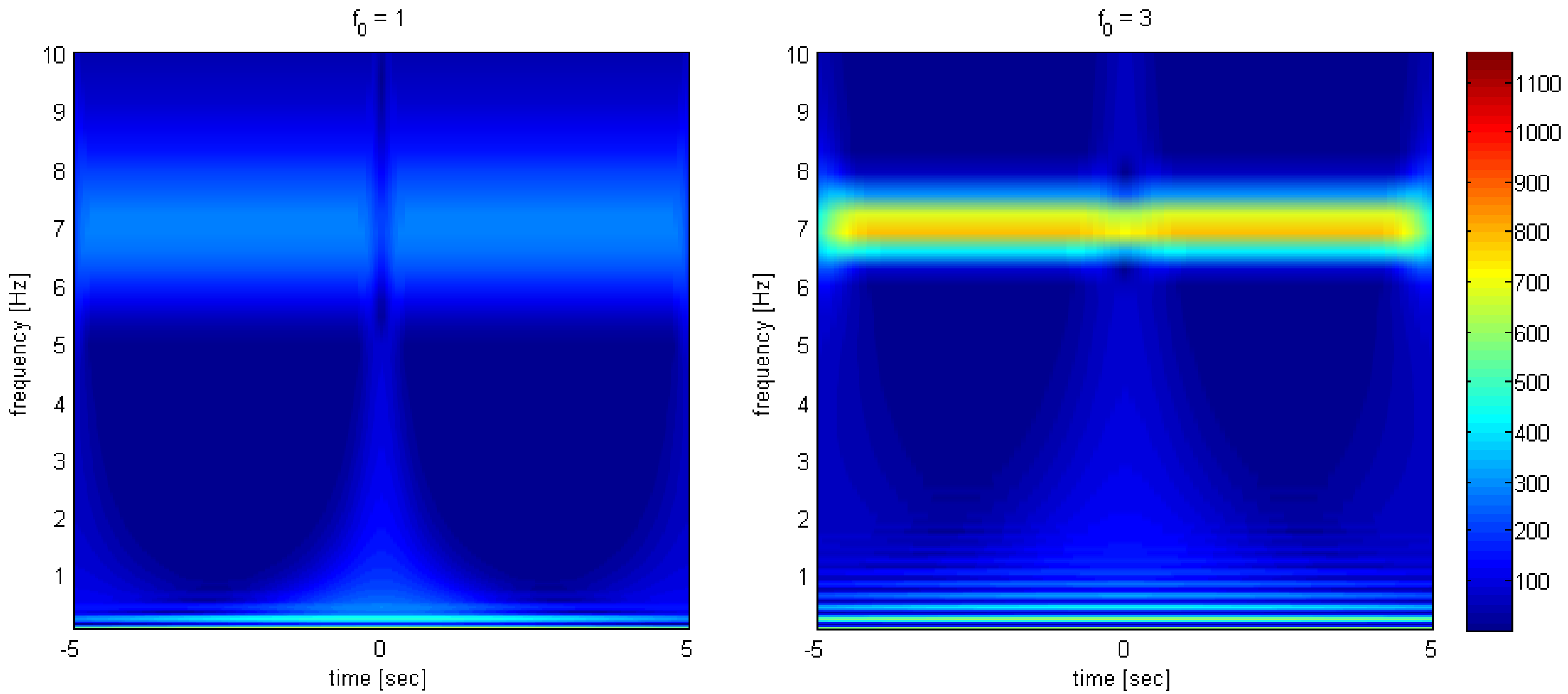
$$f = \frac{f_0}{a}$$

- Změnou f0 lze ovlivňo
časové i frekvenční ro:
škálogramu.



Vliv centrální frekvence na rozlišení škálogramu

- Pro názornost uvažujme nespojitý signál, který byl analyzován mexican hat waveletem, ke kterému je přičten harmonický signál s frekvencí 7Hz.



Princip neurčitosti

Princip neurčitosti u spojité waveletové transformace

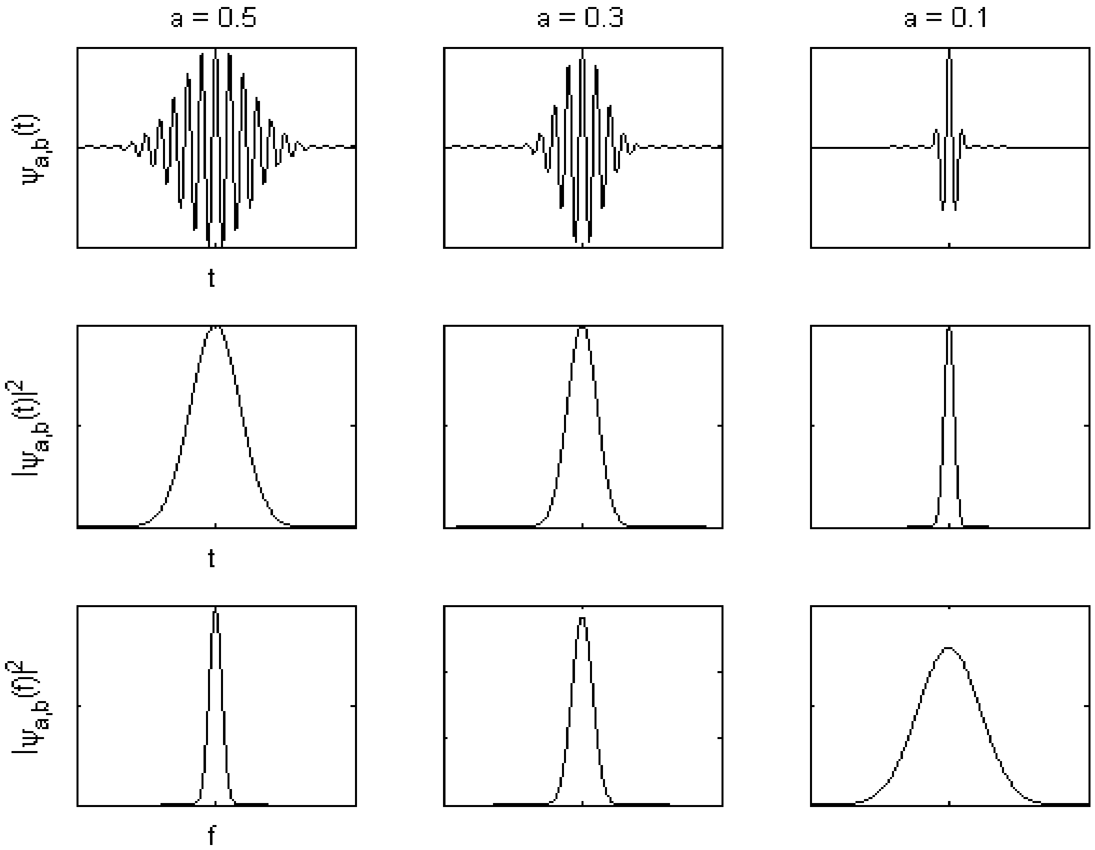
- Z platnosti Principu neurčitosti plyne, že nemůžeme nikdy dosáhnout přesné lokalizace v časové a zároveň ve frekvenční oblasti. Časo-frekvenční rozlišení transformace analyzovaného signálu je vždy závislé na časo-frekvenčním rozložení bázových funkcí, resp. funkcí pro které vyhodnocujeme podobnost s daným signálem.
- Časofrekvenční rozlišení škálogramu je závislé na frekvenčních vlastnostech použitého typu waveletu. Jak je patrné z následujícího obrázku, na rozdíl od krátkodobé Fourierovy transformace, kde je časo-frekvenční rozlišení dáno zvolenou okénkovou funkcí, stejné pro všechny frekvence, u waveletové se rozlišení v obou oblastech mění v závisloti na zvolené škále a.

Rozlišení waveletové transformace v časové a frekvenční oblasti

Morletův wavelet,

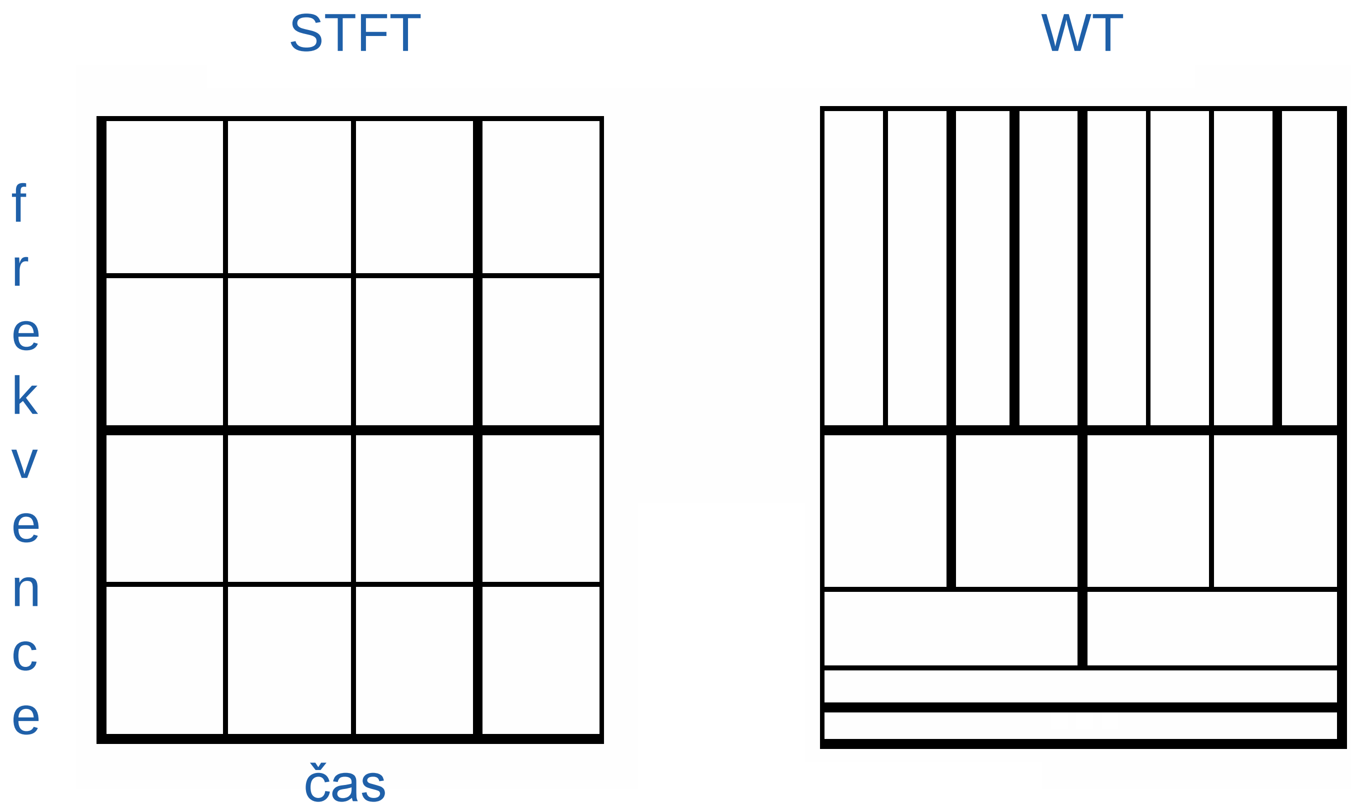
f_0 = 5Hz.

V x-ové ose jsou stejná měřítka.



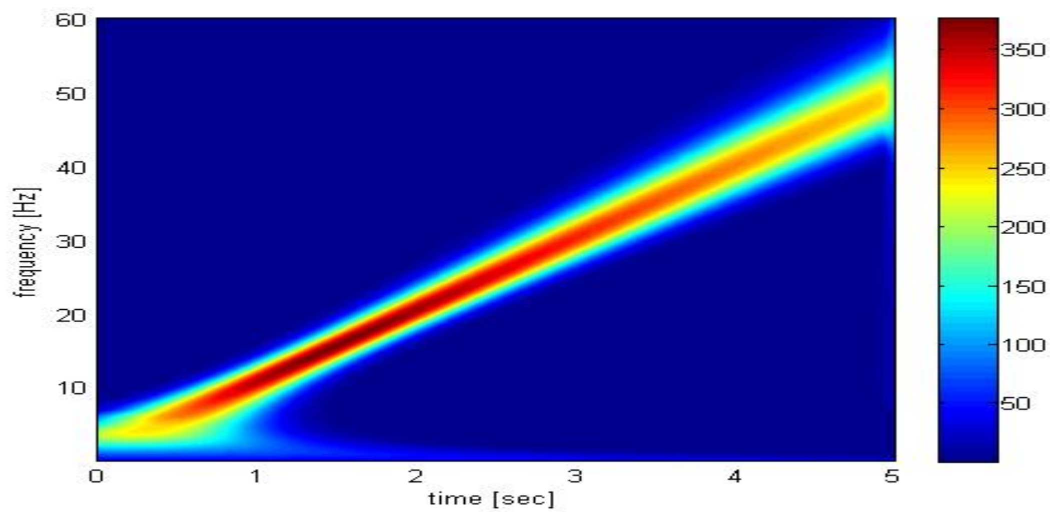
Rozlišení v časové a frekvenční oblasti:

porovnání waveletové transformace a krátkodobé Fourierovy transformace



Rozlišení waveletové transformace v časové a frekvenční oblasti

- Rozlišení v časové oblasti je přímo závislé na velikosti škály a.
- Rozlišení ve frekvenční oblasti je nepřímo závislé na velikosti škály a.
- Se zvyšující se frekvencí klesá kvalita frekvenčního rozlišení, kvalita časového rozlišení však roste. Opačný efekt má snižování frekvence.
- O platnosti tohoto tvrzení se lze přesvědčit analýzou chirp signálu s lineárně rostoucí frekvencí od 1 do 50 Hz.



Diskrétní waveletová transformace

- Hlavním rozdílem spojité a diskrétní waveletové transformace je volba množin časových posunů a škál. U spojité transformace je nejčastější volba škálové množiny v určitém rozsahu rozdělena téměř kontinuálně s logaritmickým odstupem prvků. Minimální časové posuvy jsou zajištěny přímým výpočtem konvoluce signálu a waveletu. U diskrétní transformace se volí diskrétní množina škál s logaritmickým rozdělením prvků, a množina časových posunů je vztažena k této množině.
- Spojité wavelety parametrizované škálou *a* a časovým posunem *b*, byly popsány vztahem

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Diskrétní wavelety

- U diskrétních waveletů je rozdělení škály *a* opět logaritmické a časové posuny waveletu jsou vztaženy k této škále.

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \psi\left(\frac{t - n b_0 a_0^m}{a_0^m} \right)$$

- Konstanty a_0 a b_0 se obvykle volí 2 a 1. Tím vznikne tzv. dyadická síť bodů, na které jsou škály a časové posuny definovány. Celočíselné parametry *m* a *n* udávají úroveň dilatace a posunu waveletu.

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t - n 2^m}{2^m} \right) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi\left(2^{-m} t - n \right)$$

- O takto definovaném waveletu pak hovoříme, jako o waveletu se škálou na úrovni *m* a časovým posunem na úrovni *n*.

Waveletové koeficienty

- Diskrétní dyadické wavelety musí splňovat vlastnost ortogonality (ortonormality)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(t)\psi_{m',n'}(t)\,dt = \begin{cases} 1, \text{ pro } m = m',\ n = n' \\ 0,\ \text{ pro } m \neq m',\ n \neq n' \end{cases}$$

- Se znalostí waveletových funkcí můžeme disktrétní waveletovou transformaci definovat vztahem

$$T_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\psi_{m,n}(t)\,dt$$

- Koeficienty $T_{m,n}$ se nazývají waveletové koeficienty, nebo detailové koeficienty.

Aproximační koeficienty

- Kromě waveletových funkcí, se při výpočtu diskrétní waveletové transformace používají i tzv. škálovací funkce $\Phi_{m,n}$. Ty slouží k výpočtu tzv. aproximačních koeficientů $S_{m,n}$. Pro jejich výpočet platí vztah

$$S_{m,n} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\phi_{m,n}(t)\,dt$$

Škálovací funkce jsou definovány vztahem

$$\phi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}}\,\phi\left(2^{-m}t - n\right)$$

Aproximace signálu

- Ze znalosti aproximačních koeficientů na škálovací úrovni *m* lze vypočítat signál

$$x_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m,n} \phi_{m,n}(t)$$

Signál $x_m(t)$ je aproximace signálu x(t) na škálovací úrovni *m.* Tato aproximace je závislá na typu zvolené škálovací funkce. Pro velké úrovně škály *m*, vypočteme hrubší aproximaci signálu x(t), pro malé úrovně škály m, vypočteme jemnější aproximaci signálu x(t).

V této souvislosti platí vztah

$$x(t) = \lim_{m \to -\infty} x_m(t)$$

Rekonstrukce signálu

- Po výpočtu aproximačních koeficientů a detailových koeficientů může být původní signál zapsán ve tvaru jejich lineární kombinace

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{m_0,n}\phi_{m_0,n}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n}\psi_{m,n}(t)$$

neboli

$$x(t) = x_{m_0}(t) + \sum_{m=-\infty}^{m_0} d_m(t)$$

kde detail signálu x(t) na škále úrovně *m* je

$$d_m(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_{m,n}\psi_{m,n}(t)$$

Výpočet škálovacích waveletových funkcí

- Škálovací funkce a wavelety se generují rekurzivně podle vztahů

$$\phi(t) = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi(2t - i)$$

$$\psi(t) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^i c_{1-i} \phi(2t - i)$$

- První rovnice je v literatuře označována jako škálovací rovnice, c_i jsou tzv. škálovací koeficienty. Tyto koeficienty jsou jedinečné pro každý typ diskrétního waveletu. Ve vztahu k úrovni škály *m,* můžeme tyto rovnice interpretovat ve stylu:

  "Škálovací(waveletová) funkce na úrovni škály *m* je lineární kombinací škálovacích(waveletových) funkcí na úrovni *m-1.*"

$$\phi\left(2^{-m} t\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \phi\left(2^{-(m-1)} t - i\right)$$

původní vztah získáme dosazením m=0

Haarův wavelet

- Základním typem diskrétních waveletů je Haarův wavelet. Škálovací funkce a wavelety jsou popsány rovnicemi

$$\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-1)$$

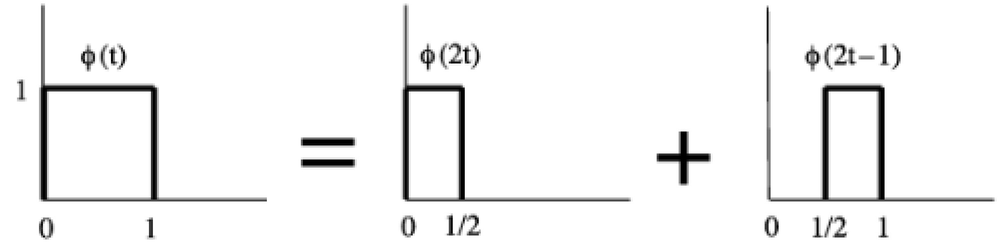
$$\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le \mathrm{t}<1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$\psi(t) = \phi(2t) - \phi(2t-1)$$

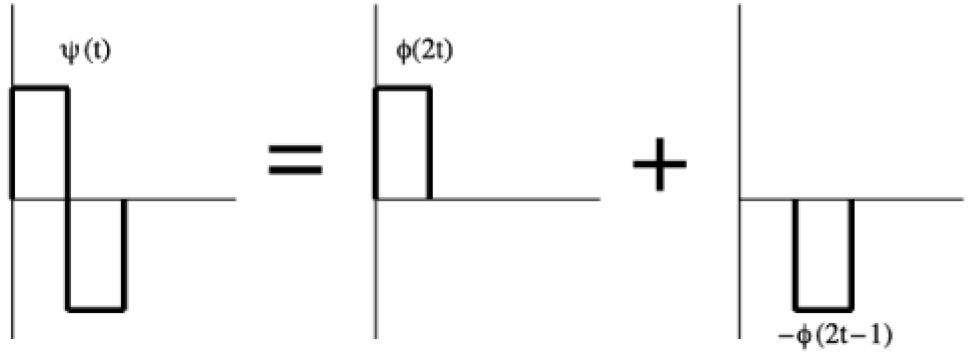
$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le \mathrm{t}<0.5 \\ -1 & 0.5 \le \mathrm{t}<1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Škálovací waveletová funkce Haarova waveletu

škálovací funkce

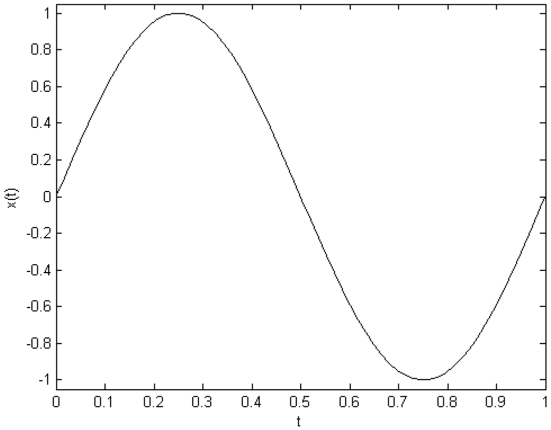


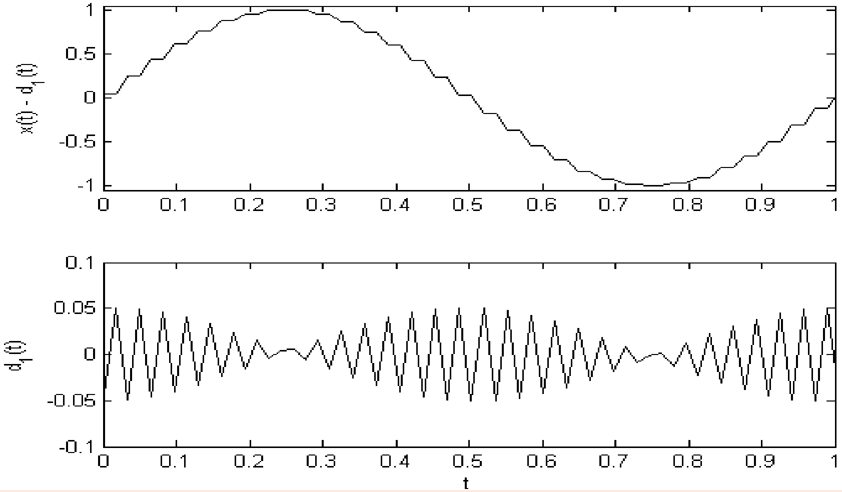
waveletová funkce



- Uvažujme harmonický signál $x(t) = \sin(2\pi t)$

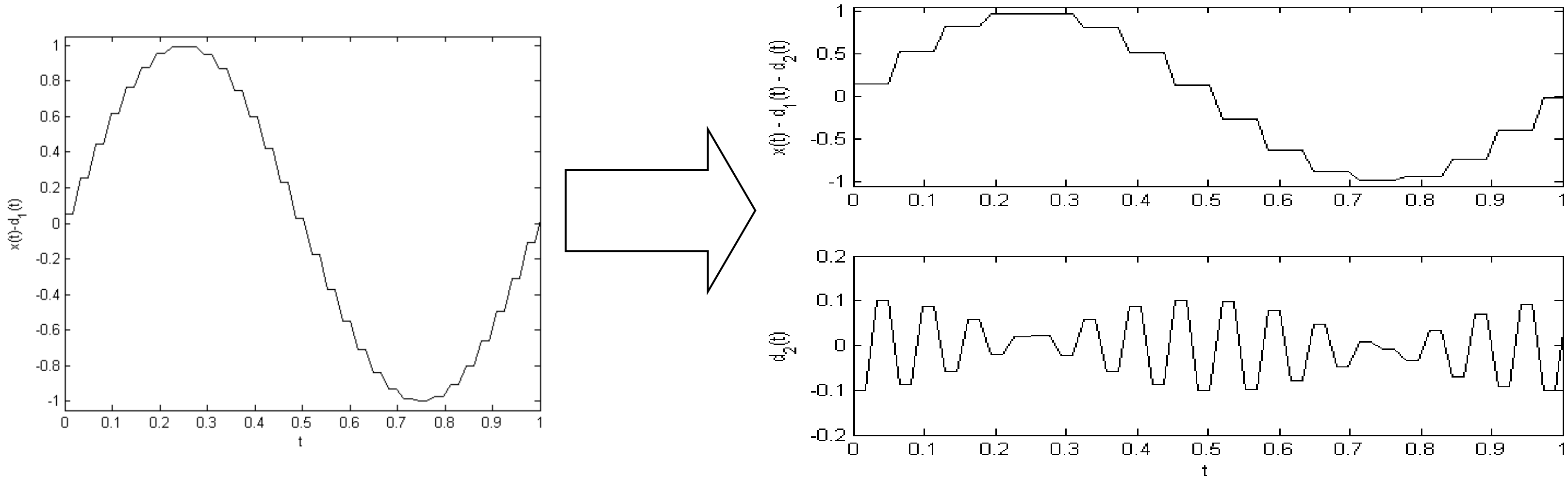
Délka signálu je 1 vteřina a skládá se z $2^6 = 64$ prvků. Jelikož se jedná o diskrétní signál, nemůže být šířka škálovací ani waveletové funkce nekonečně malá (to lze splnit pouze u spojitých signálů). Škály waveletů mohou nabývat hodnot 2^0-2^7, tedy parametr *m* může nabývat hodnot od 0 do 6. Aproximace signálu pro úroveň *m = 0* je rovna přímo signálu x(t). V prvním kroku výpočtu lze originální signál rozložit na jeho aproximaci a detail na úrovni m = 1.





Rozklad signálu – úroveň 2

- V druhém kroku rozložíme aproximaci signálu z úrovně m = 1 na aproximaci a detail na úrovni m = 2.

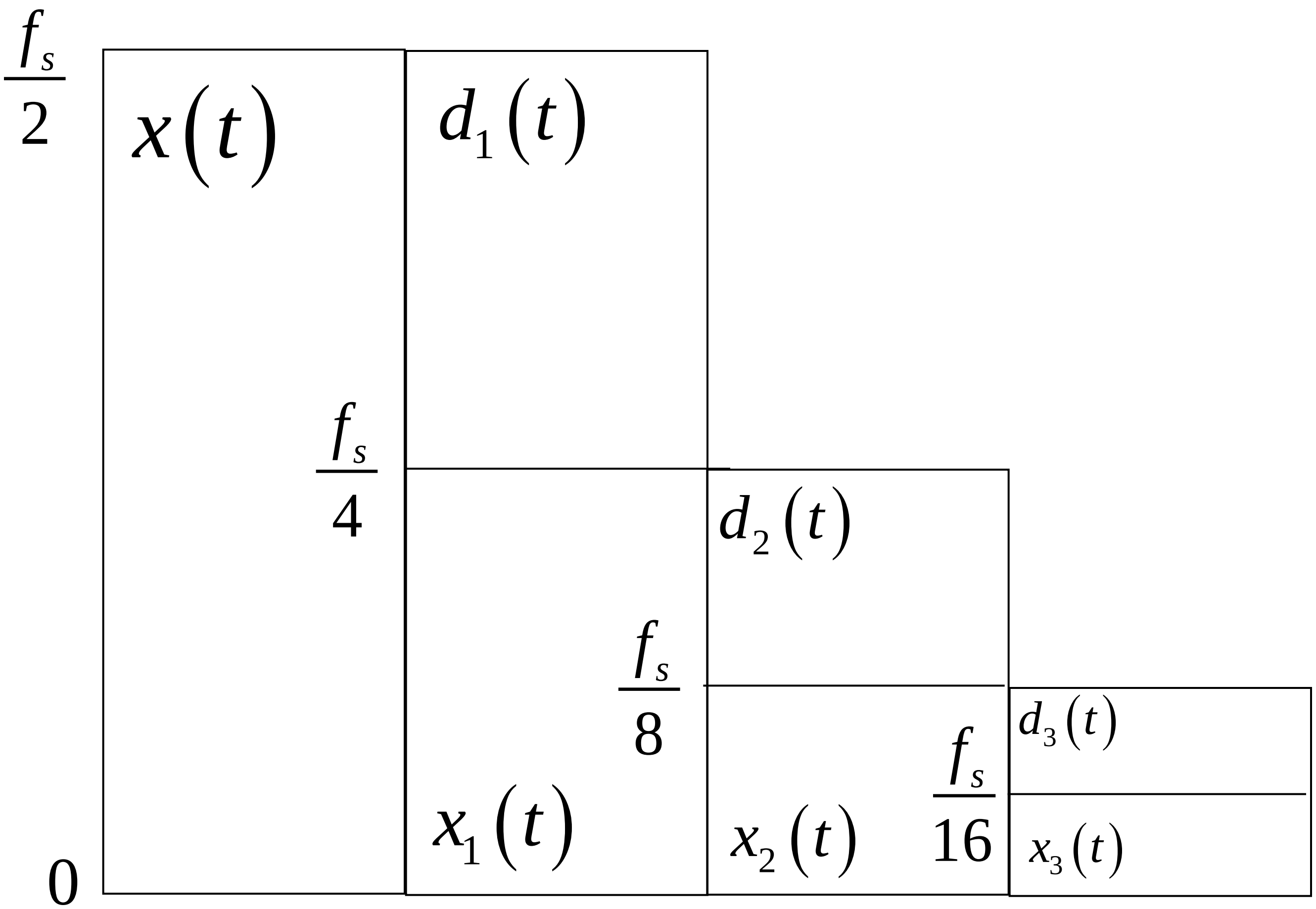


- Aproximace a detaily signálu jsou složeny z pulsů o určité šířce vážených aproximačními a detailovými koeficienty. Šířka těchto roste s mocninou 2.

Šířka frekvenčního pásma aproximace a detail signálu

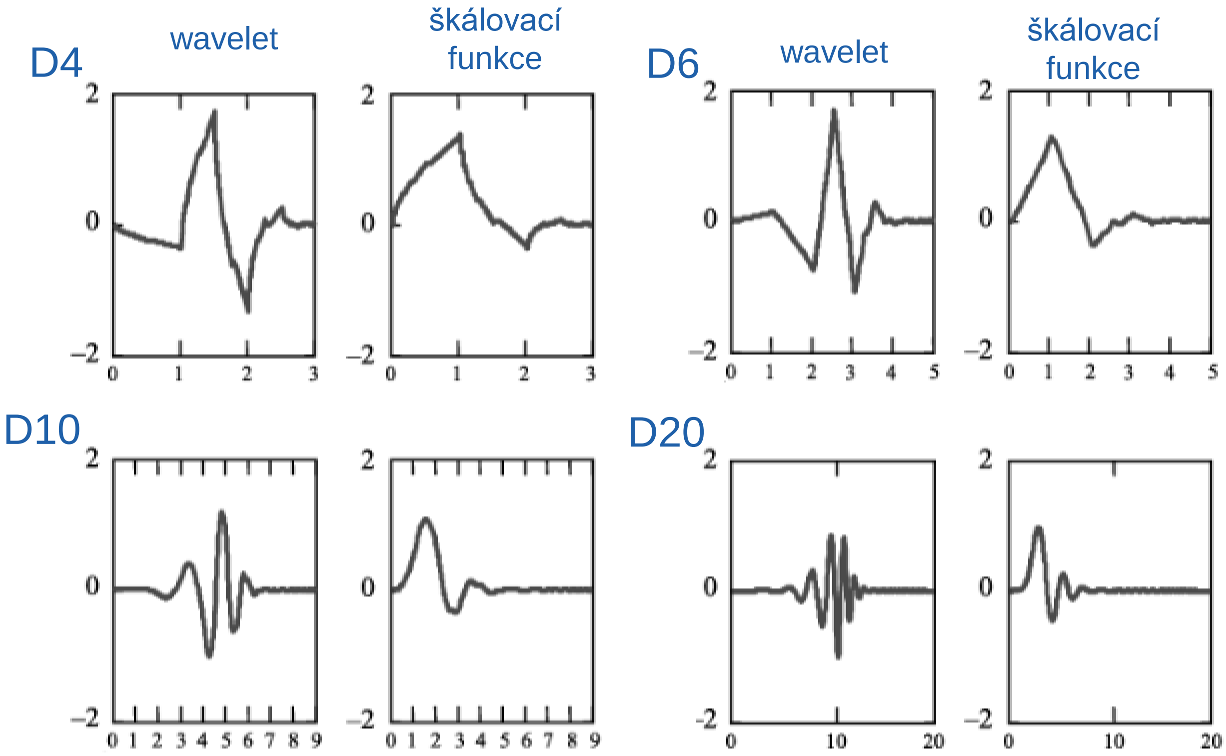
- Proces výpočtu aproximací a detailů signálu x(t) pomocí Haarova waveletu lze interpretovat také jako snižování vzorkovací frekvence signálu. Uvažujme, že signál je vzorkován frekvencí f_s Hz. Frekvenční rozsah signálu je 0 až $f_s/2$ Hz. Aproximace signálu na úrovni *m=0*, je shodná s analyzovaným signálem obsahuje tedy stejné frekvenční složky. Vzorkovací frekvence aproximace signálu na úrovni *m=1* je $f_s/2$ Hz a její frekvenční rozsah je tedy 0 až $f_s/4$ Hz. Detail signálu na této úrovni obsahuje ostatní složky signálu z frekvenčního pásma $f_s/4$ až $f_s/2$. Aproximace a detail signálu na úrovni *m=2* se vypočte z aproximace signálu na úrovni *m=1*. Aproximace na úrovni m=2 tedy obsahuje frekvenční složky v rozsahu $f_s/0$ až $f_s/8$ a detail obsahuje frekvenční složky $f_s/8$ až $f_s/4$. Výpočet aproximačních koeficientů je tedy filtrace signálu filtrem dolní propust. Pro výpočet waveletových koeficientů se používá filtr typu korní propust. Frekvenční pásma těchto filtrů jsou dána úrovní škály. Diskrétní waveletovou transformaci můžeme chápat jako filtraci signálu pomocí soustavy bank filtrů.

Banky filtrů



Daubechies wavelety

- Mezi další často používané wavelety patří wavelety z rodiny Daubechies:

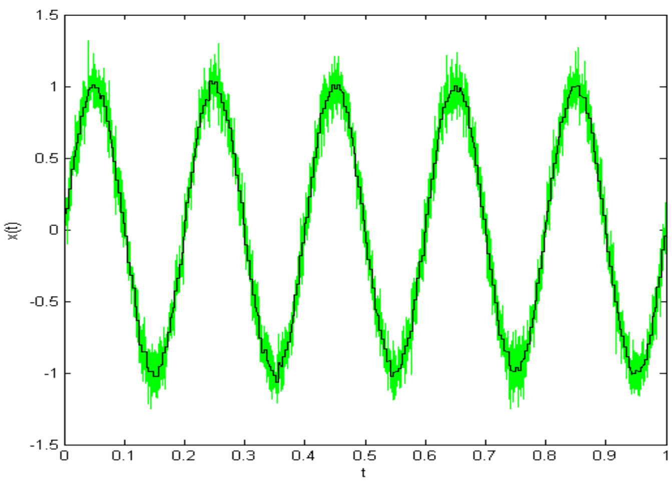


Filtrace signálu

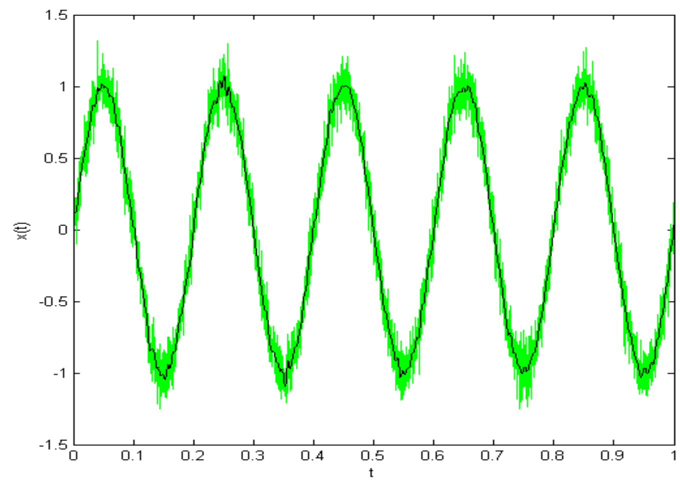
- Dekompozice signálu do takto definovaných frekvenčních pásem může být použita pro odstranění nežádoucích složek signálu (resp. frekvenčních pásem).

$$x(t) = \sin(2\pi 5t) + e(t), e(t) \sim N(0, 0.1)$$

Haar



Daubechies 18



HILBERT-HUANGOVA TRANSFORMACE

Okamžitá frekvence

Signály v přírodě jsou ve své podstatě signály mající reálný charakter, nicméně je často vhodné definovat signál v komplexní podobě tak, aby v nějakém smyslu korespondoval s reálným signálem. Jedna z motivací pro definování komplexního signálu je ta, že komplexní signál dovoluje definovat okamžitou fázi, ze které je pak možné získat okamžitou frekvenci

$$z(t) = s_r + j \cdot s_i = A(t)e^{j\varphi(t)}$$

Jestliže je možné určit imaginární část, je pak jednoznačná definice amplitudy a fáze následující:

$$A(t) = \sqrt{s_r^2 + s_i^2}; \quad \varphi(t) = \arctan\frac{s_i}{s_r},$$

což znamená, že okamžitá frekvence může být definována následujícím způsobem:

$$\omega(t) = \varphi'(t) = \frac{(s_i' s_r - s_r' s_i)}{A^2}.$$

Sporným bodem je tedy, jak definovat imaginární část s_i komplexního signálu z(t), tak aby bylo možné vypočítat okamžitou frekvenci ω(t) z rovnice.

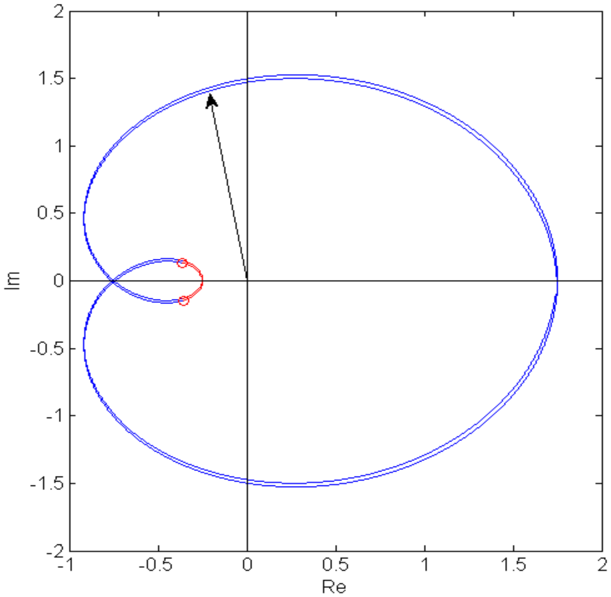
Okamžitá frekvence

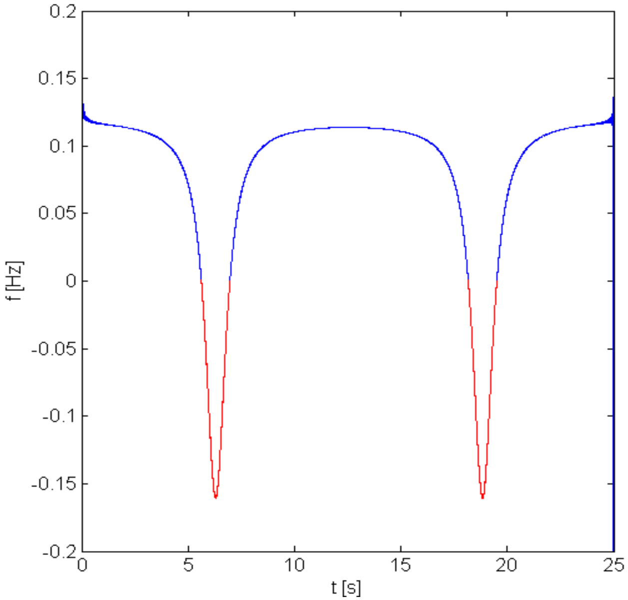
- Potřeba korektní definice okamžité frekvence se objevila s příchodem frekvenční modulace radiového přenosu ve dvacátých letech 20. století.
- V současnosti je používána výhradně metoda analytického signálu, který je výsledkem aplikace Hilbertovy transformace na analyzovaný signál.
- Stále ovšem zůstává sporná otázka, zda je možné bez omezení definovat okamžitou frekvenci jako

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}.$$

- Okamžitá frekvence v rovnici je definována jako derivace fáze, která v každém časovém okamžiku nabývá právě jedné hodnoty. Většina reálných signálů je ovšem tvořena celým spektrem frekvencí, a snaha vypočítat okamžitou frekvenci z takovýchto signálů vede často k záporným frekvencím, které nejsou fyzikálně interpretovatelné. Z tohoto důvodu je zaveden termín *monokomponentní signál (monocomponent signal),* který obsahuje právě jednu frekvenční složku.

Okamžitá frekvence – multikomponentní signál



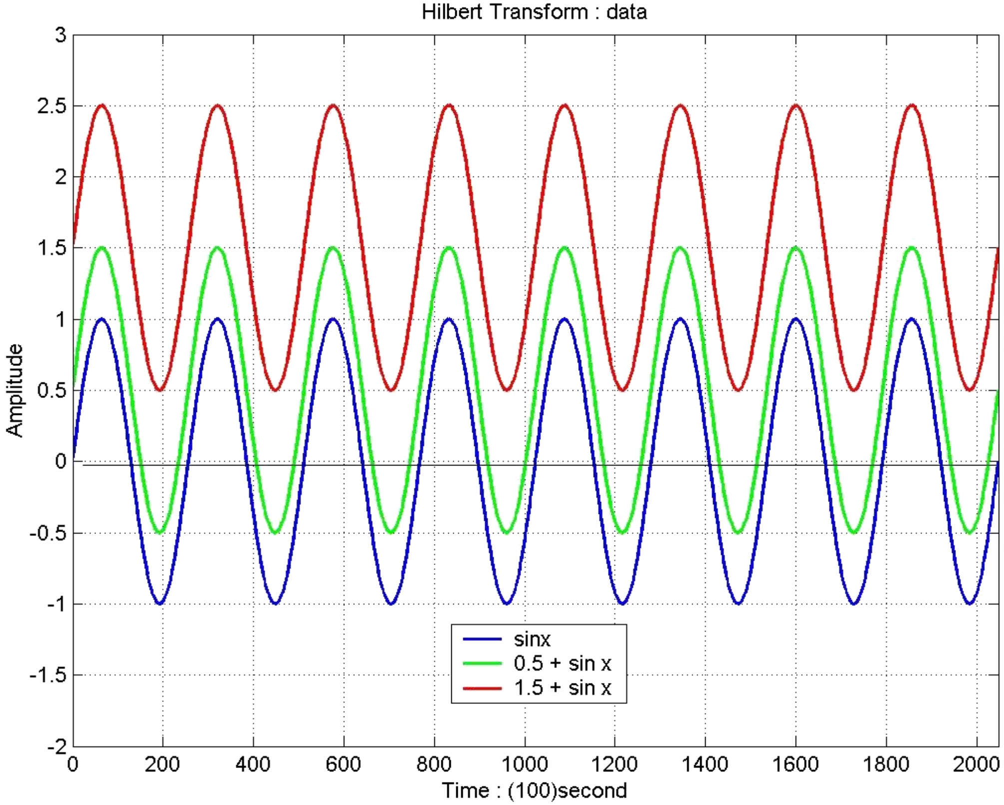


$$s(t) = \cos(\frac{1}{2}t) + \frac{3}{4}\cos(t)$$

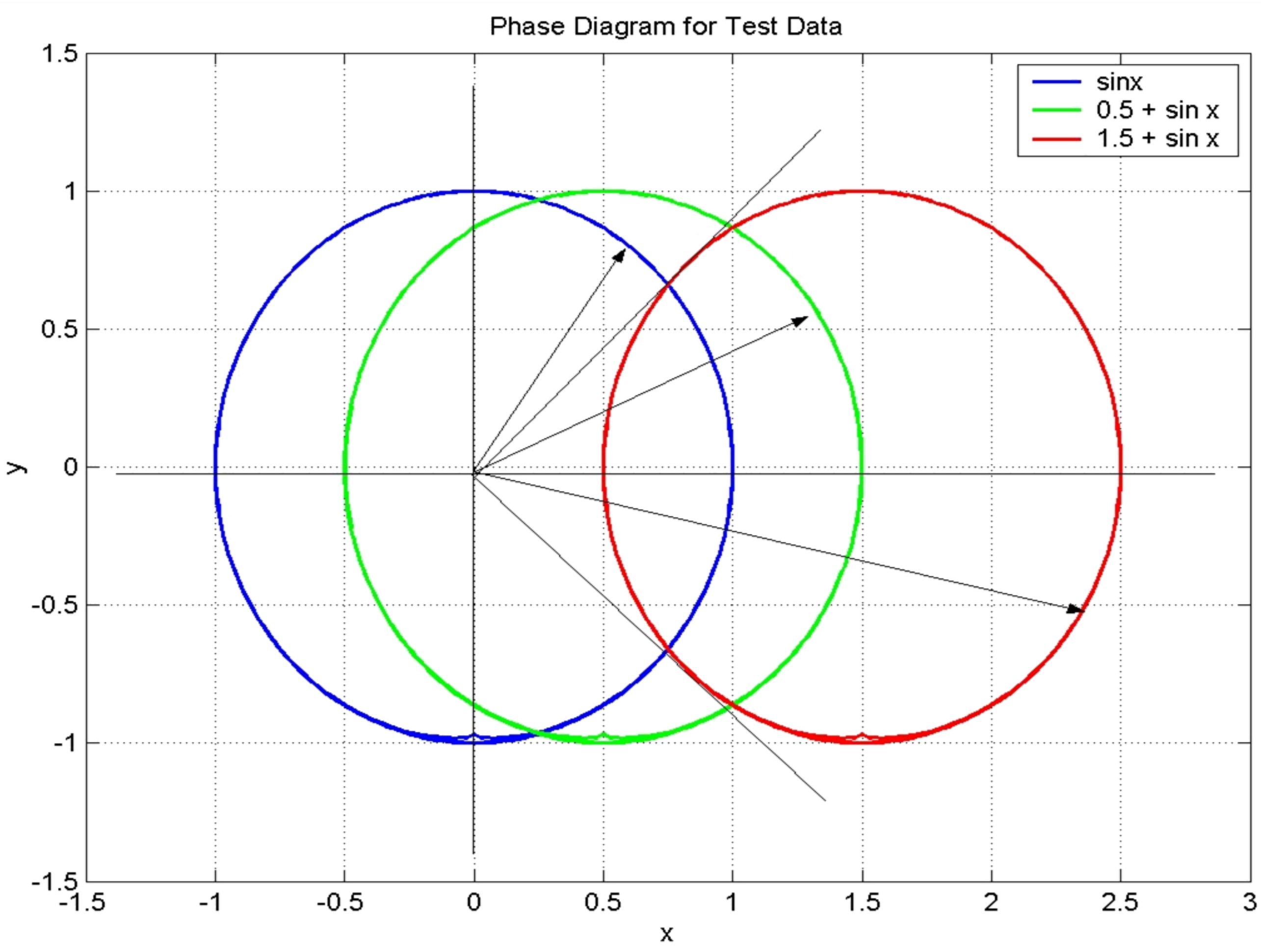
Analytický signál byl získán pomocí Hilbertovy transformace. Červeně je na obrázku zvýrazněna oblast, kde frekvence nabývá záporných hodnot a tak neodpovídá fyzikální představě o frekvenci harmonického signálu

Omezení monokomponentních signálů

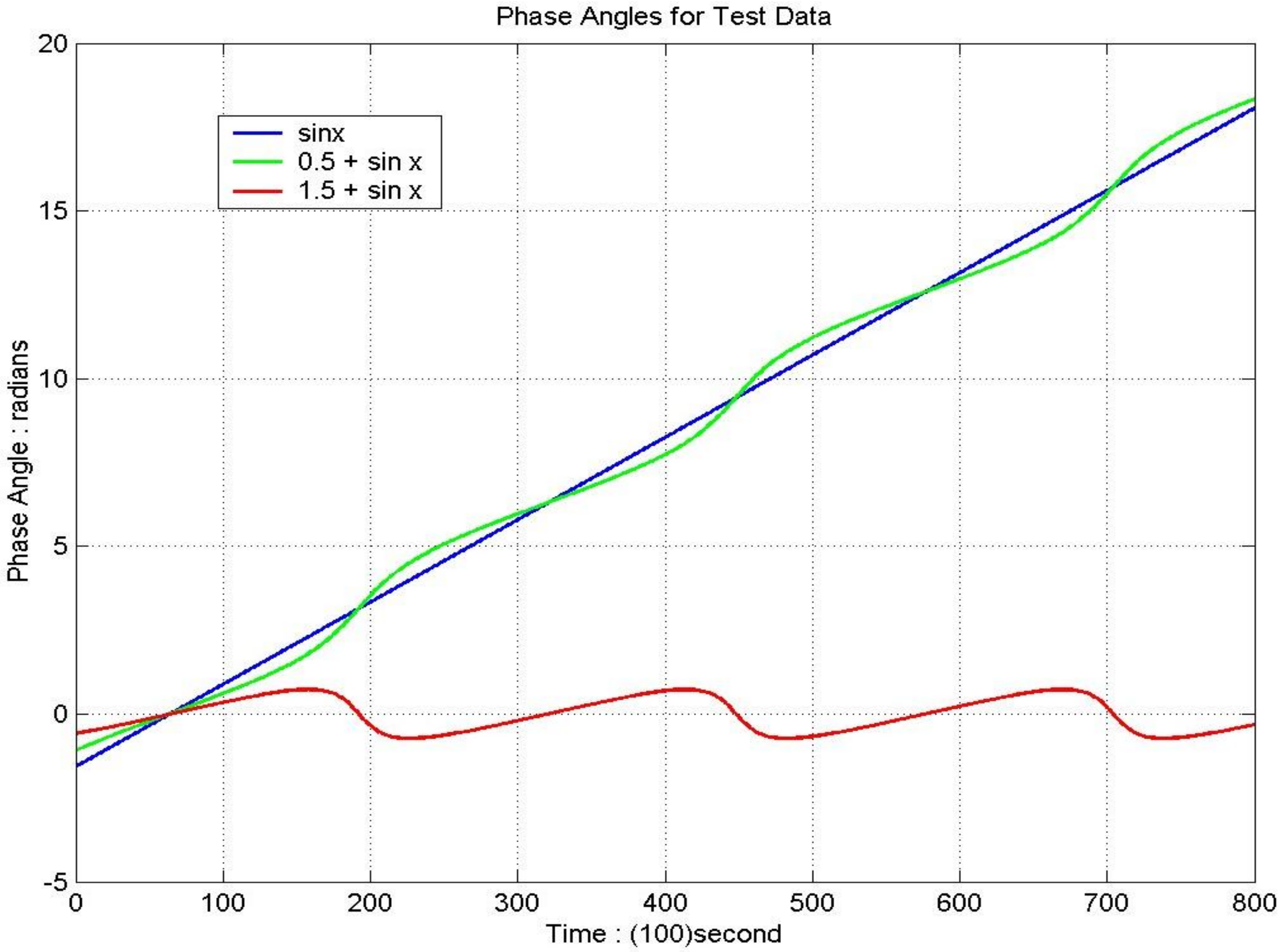
Omezení musí být ale také kladena na monokomponentní signály. Pokud platí, že střední hodnota signálu není nulová, pak vývoj fáze a tím i okamžité frekvence nemůže být správně interpretován.



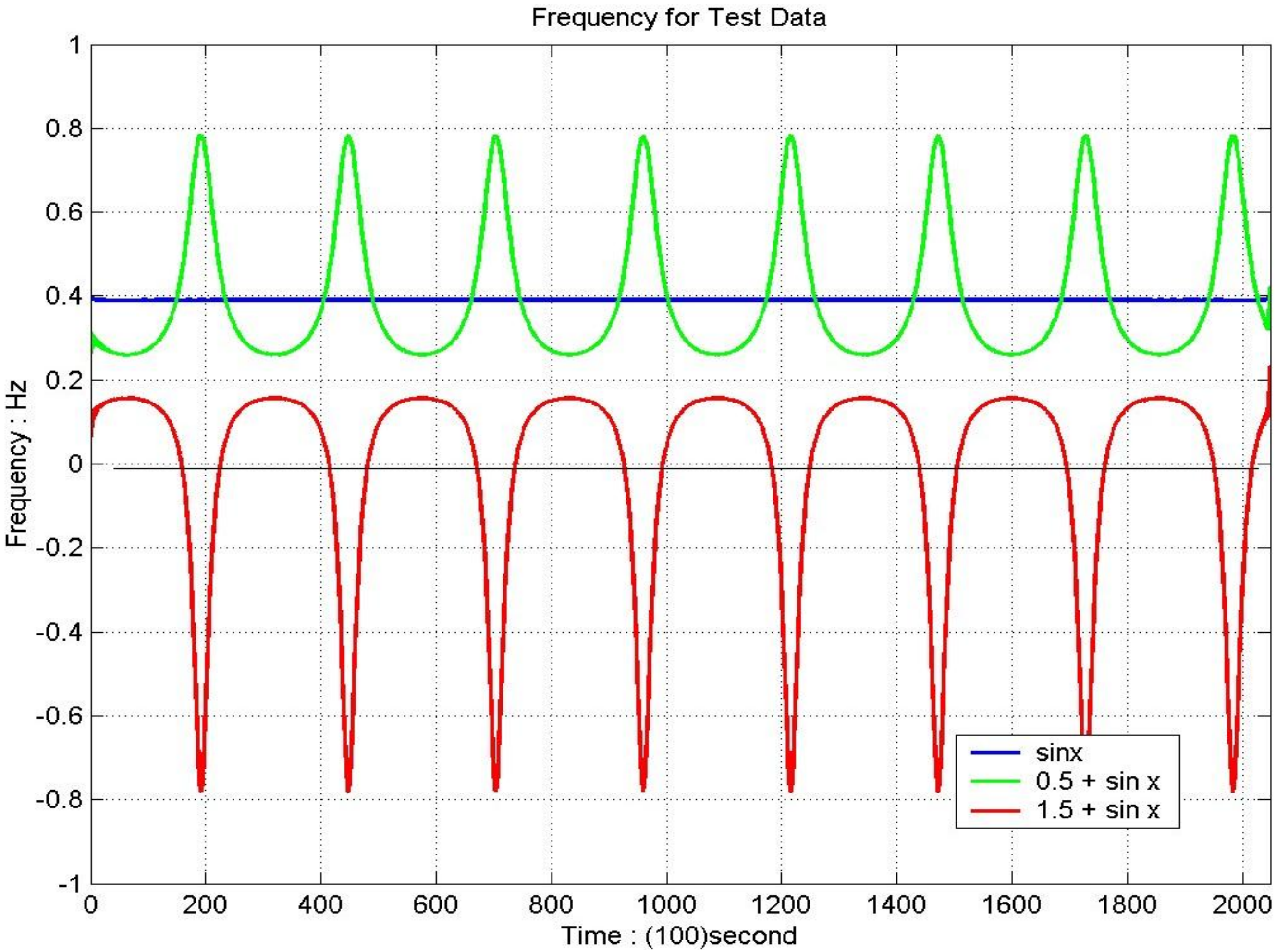
Omezení monokomponentních signálů



Hilbertova transformace a+sin(x)



Hilbertova transformace a+sin(x)



IMF – Intrinsic Mode Function

Jednoduchý příklad uvedený výše, ukazuje fyzikální interpretaci omezujících podmínek. Naznačuje také, jak v praxi dekomponovat data tak, aby vzniklé komponenty splňovaly podmínky na ně kladené. Fyzikálně nutné podmínky pro to, abychom mohli definovat smysluplně okamžitou frekvenci jsou takovéto:

- funkce jsou symetrické vzhledem k lokální hladině nulové střední hodnoty
- funkce mají stejný počet průchodů nulou a počet extrémů

S využitím těchto poznatků, byla navržena třída funkcí označovaná jako *vlastní modální funkce (IMF)*.

- IMF je funkce, jejíž časový průběh splňuje dvě podmínky:
- V celém souboru dat se musí počet extrémů a počet průchodů nulou buď rovnat, nebo se lišit maximálně o jedna.
- V každém okamžiku je střední hodnota obálky definované lokální maximem a obálky definované lokálním minimem rovna nule.

Empirická modální dekompozice

Dekompozice je založena na následujících předpokladech:

- Dekomponovaný signál má nejméně dva extrémy - jedno maximum a jedno minimum
- Charakteristické časové měřítko je definováno odstupem mezi extrémy
- Pokud data postrádají extrémy, ale obsahují inflexní body, pak musí být možné získat extrémy derivací signálu

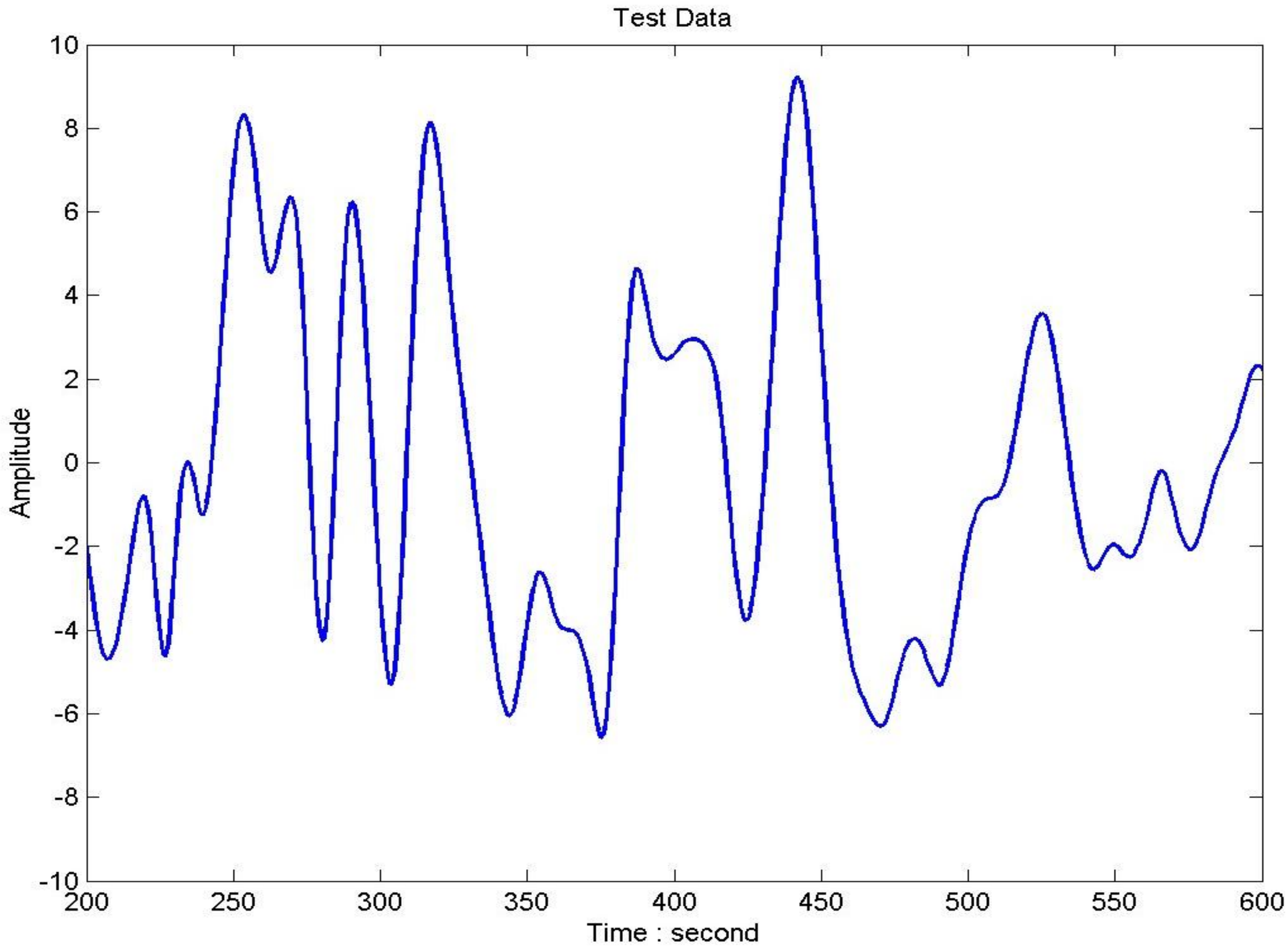
EMD je implementována jako iterační proces, který má několik fází. Prvním krokem EMD je identifikace lokálních extrémů. Identifikovaná lokální minima a lokální maxima jsou poté interpolována křivkou. Huang předpokládá použití kubického splinu.

- proložením vznikne vrchní obálka $e_{max}(t)$ a spodní obálka $e_{min}(t)$

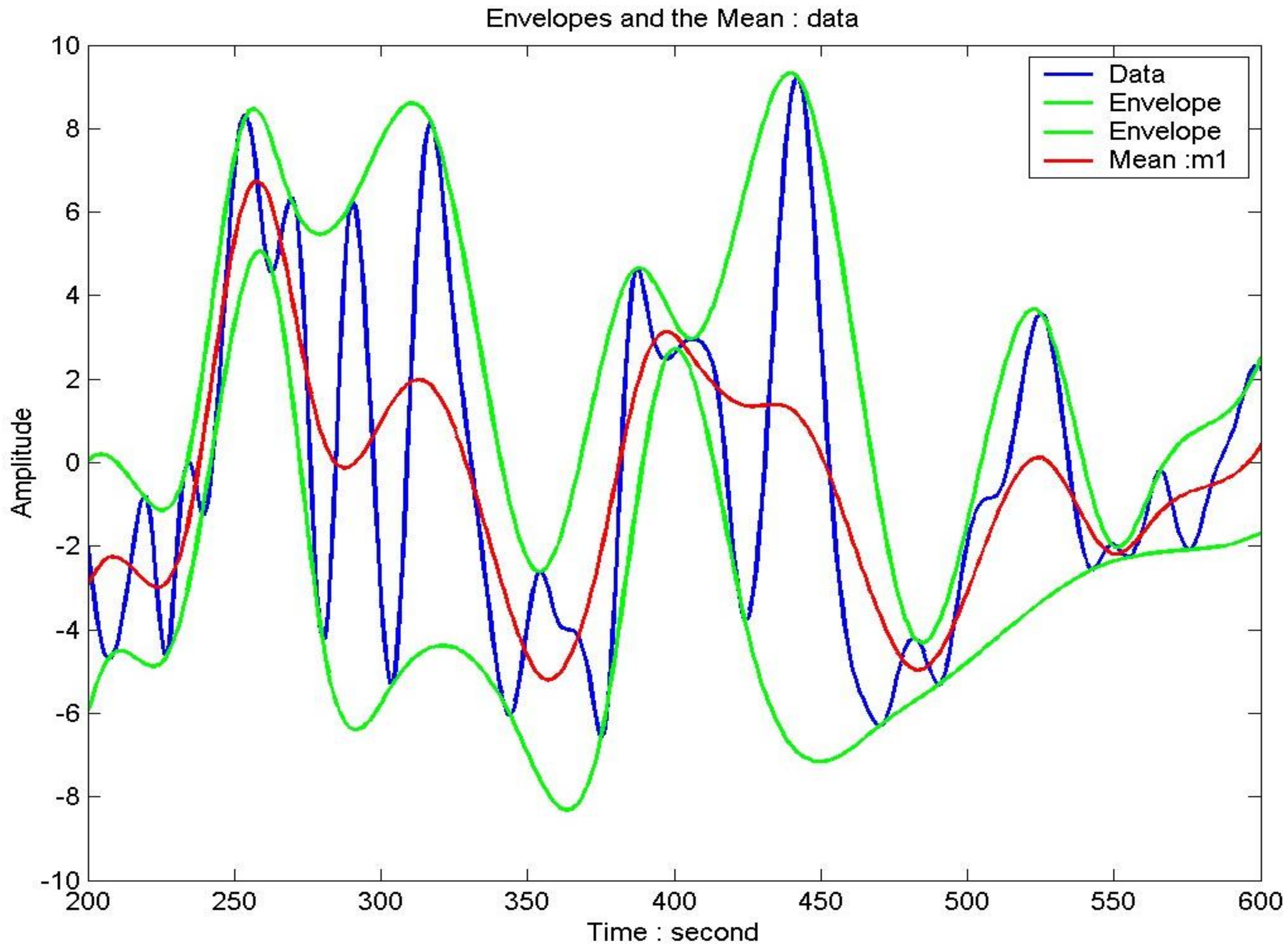
- obě křivky vytvářejí obálku původního signálu s(t)

- střední hodnota obálky m je pak definována jako $$m(t) = \frac{e_{\min}(t) + e_{\max}(t)}{2}.$$

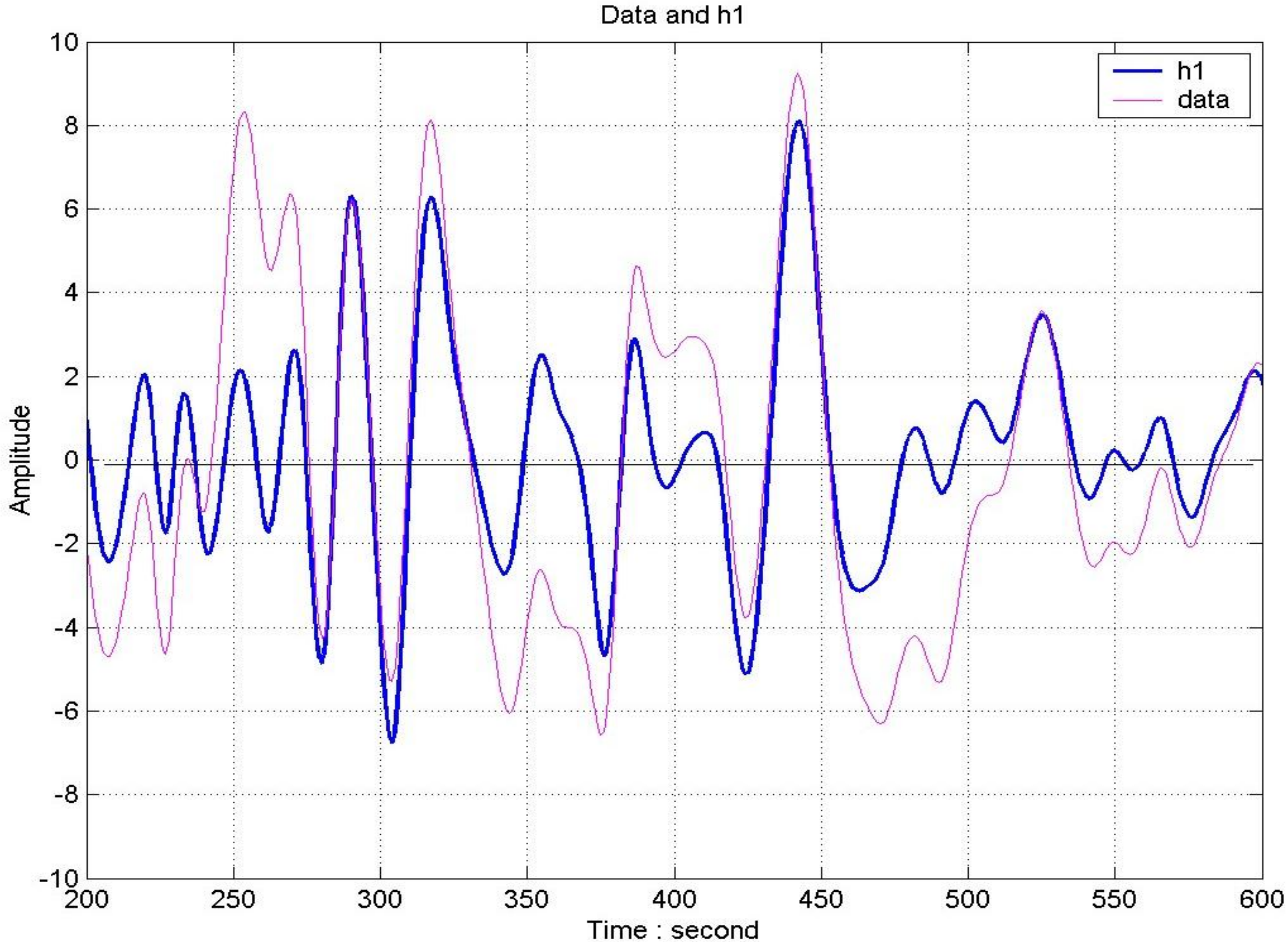
Empirická modální dekompozice – test data



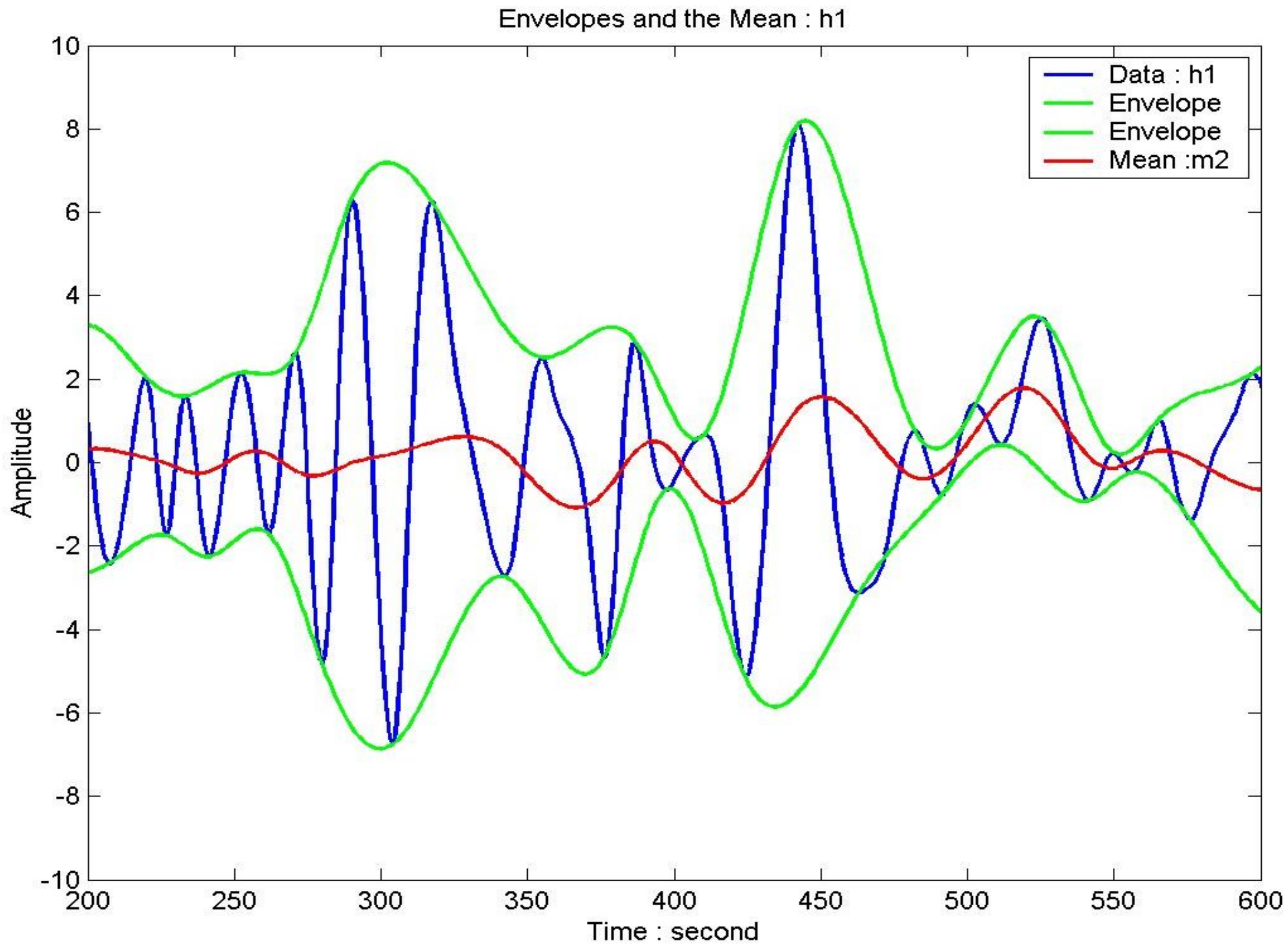
Empirická modální dekompozice – test data a emax1, emin1, m1



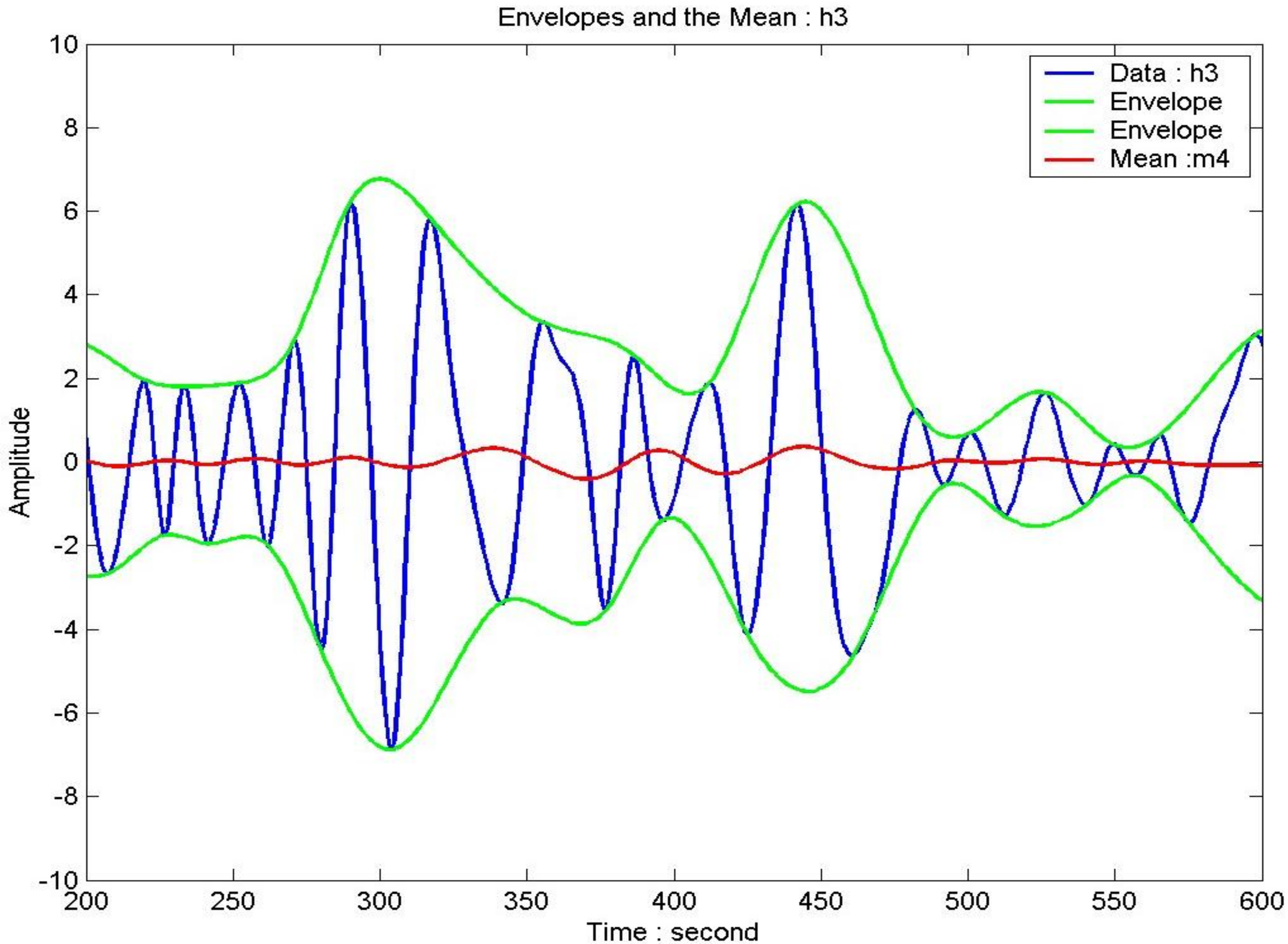
Empirická modální dekompozice – test data a h1



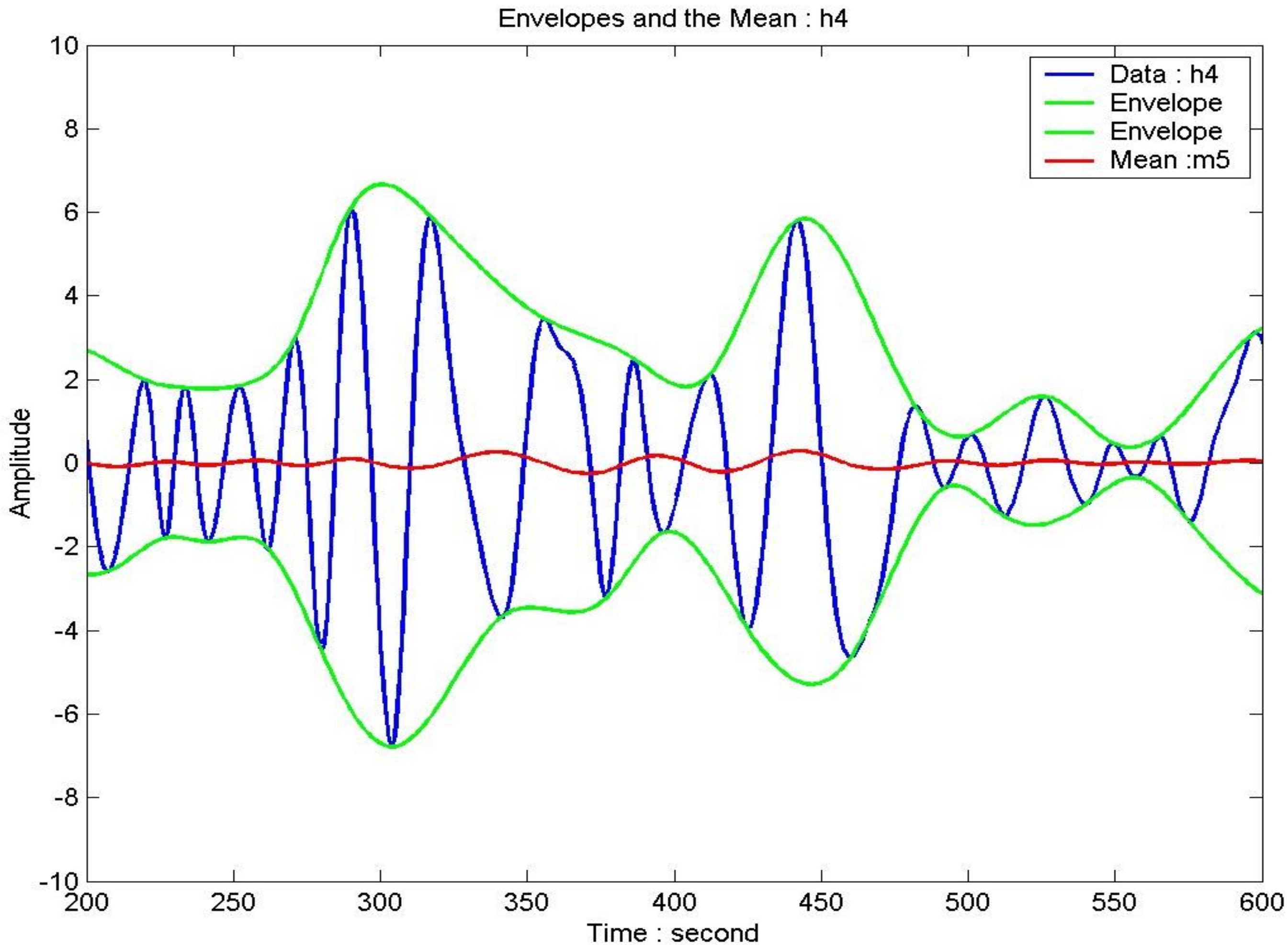
Empirická modální dekompozice – h1 a emax2, emin2, m2



Empirická modální dekompozice – h3 a emax4, emin4, m4



Empirická modální dekompozice – h4 a emax5, emin5, m5



Empirická modální dekompozice – popis výpočtu

Odečtením signálu a střední hodnoty obálky

$$s(t) - m_1 = h_1$$

získáme první komponentu. Ideálně by tato komponenta mohla být označena již jako první složka EMD rozkladu. Reálně ovšem nesplňuje požadavky kladené na IMF. Po odečtení vznikají nové extrémy vlivem nepřesné aproximace kubickým splinem (překmitnutí nebo podkmitnutí v obálce). Proto jsou v komponentě h1 opět nalezeny lokální extrémy, vypočtena obálka a nový střed obálky jako další krok iteračního procesu:

$$h_1 - m_{11} = h_{11}.$$

Tento postup je opakován, dokud výsledná komponenta nesplňuje podmínky kladené na IMF.

$$h_{1(k-1)} - m_{1k} = h_{1k}$$

Výsledkem je první IMF komponenta c1

$$c_1 = h_{1k}.$$

Kriterium pro ukončení iteračního procesu – SD a S

Iterační proces má dva vlivy na dekomponovaná data:

- eliminuje výkyvy v datech (filtruje nízkofrekvenční složky)
- vyhlazuje rozdílné amplitudy

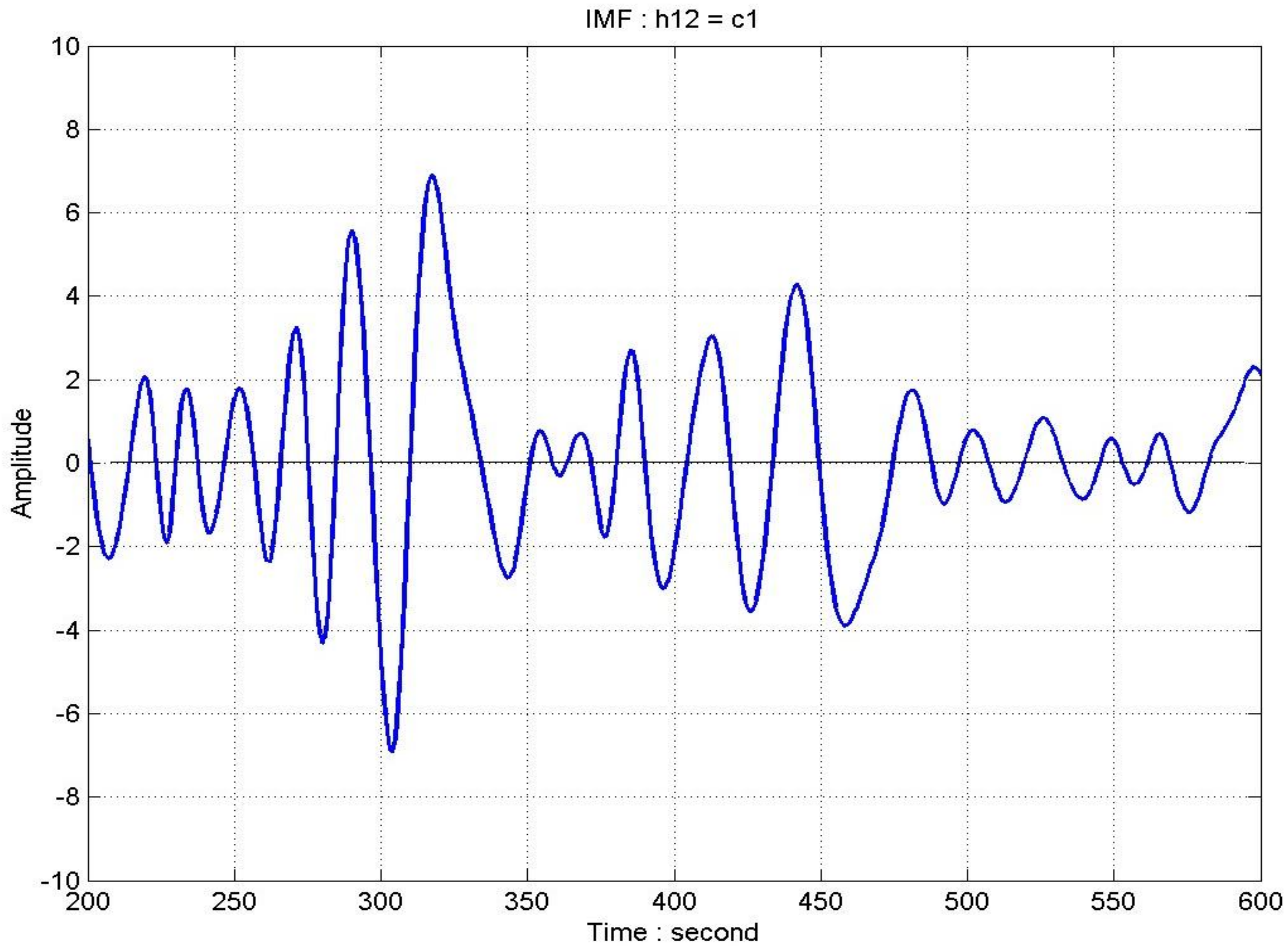
Aby bylo zajištěno, že IMF komponenty mají fyzikální smysl (aby nedošlo k přeiterování, nebo aby nevznikla nekonečná smyčka), je nutné zavést kritérium pro ukončení iteračního procesu.

1. Jako kritérium může být s úspěchem použita hodnota směrodatné odchylky, která je vypočtena ze dvou po sobě následujících výsledků iteračního procesu (SD kritérium)

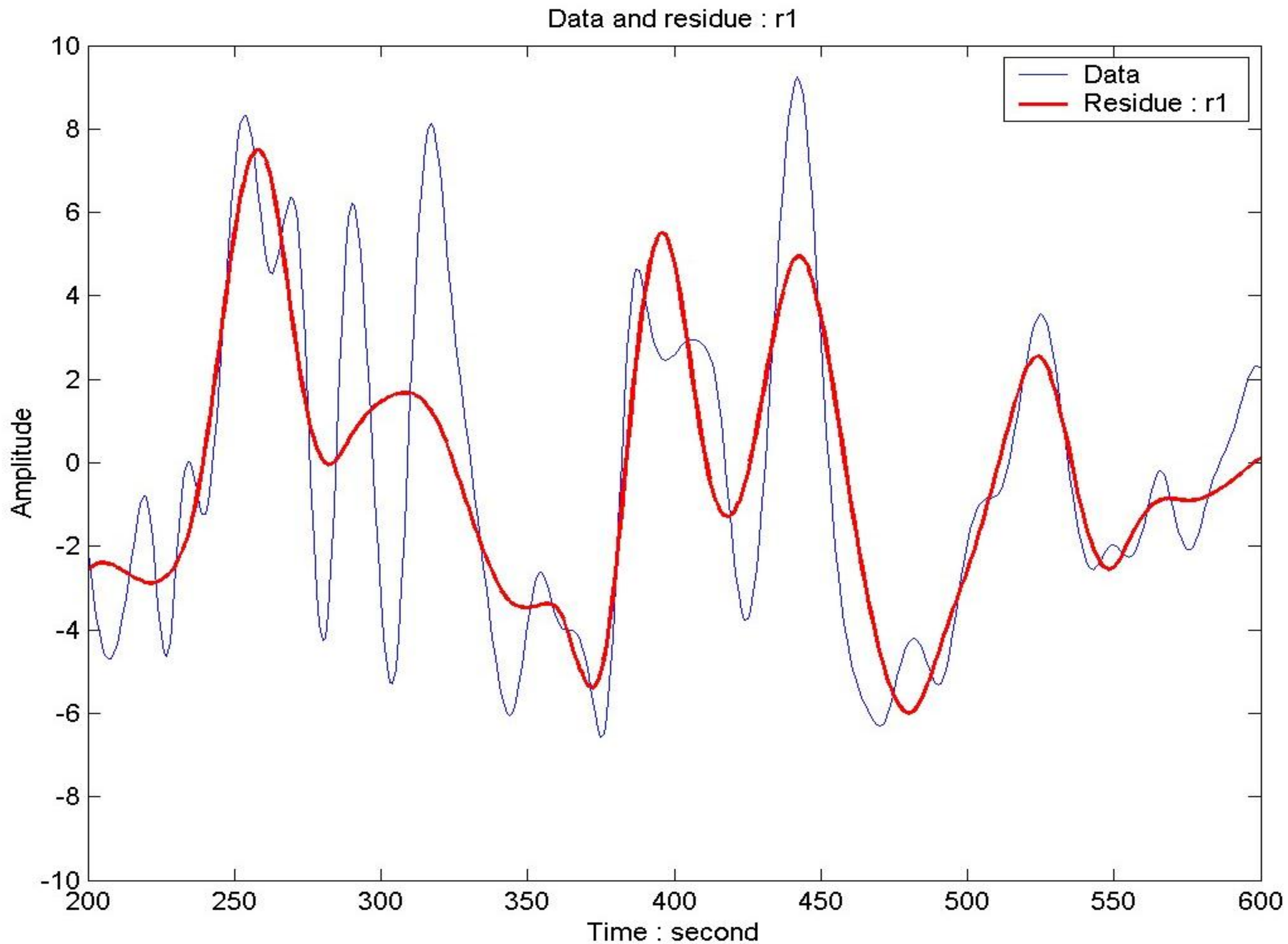
$$\sigma = \sum_{t=0}^{T} \left[\frac{\left| \left(h_{1(k-1)}(t) - h_{1k}(t) \right) \right|^2}{h_{1(k-1)}^2(t)} \right].$$

2. S – kritérium: Je definováno číslo S, které udává počet po sobě jdoucích iterací, během nichž se nemění počet průchodů nulou a extrémů.

Empirická modální dekompozice IMF c1



Empirická modální dekompozice – data a r1



EMD – iterační proces

První IMF komponenta obsahuje, jak lze odvodit, nevyšší frekvenční složku signálu . Můžeme ji jednoduše separovat od zbytku signálu:

$$s(t) - c_1 = r_1$$

Protože reziduum stále ještě obsahuje složky s nižšími frekvencemi, je reziduum označeno jako nová data , která jsou následně opět podrobena výše popsanému iteračnímu procesu. Tento proces může být opakován na všechna pozdější rezidua:

$$r_1 - c_2 = r_2, \ldots, r_{n-1} - c_n = r_n.$$

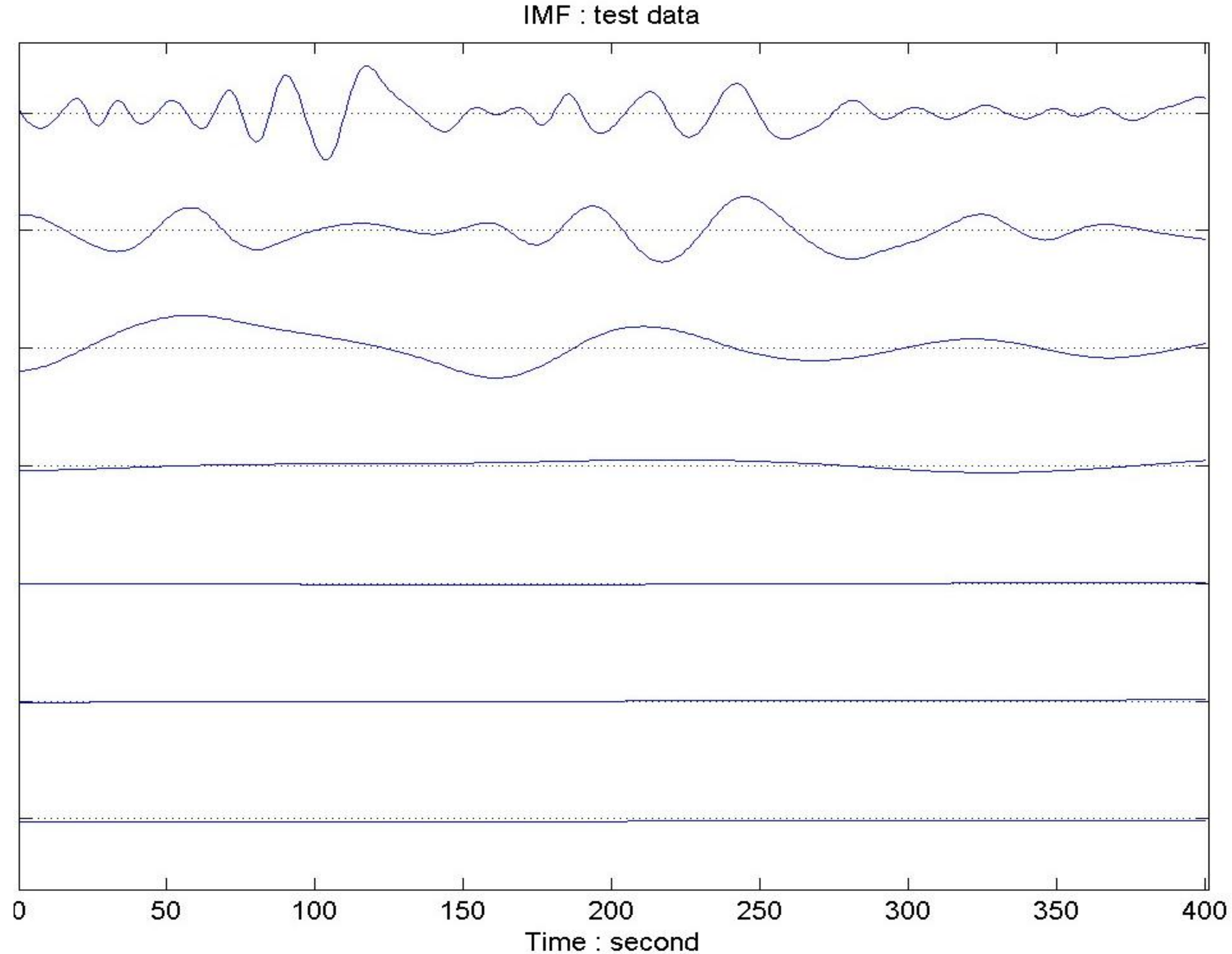
Dekompozice může být ukončena jedním z následujících kritérií:

- komponenta c_n, nebo reziduum r_n je menší než předem zvolená hladina
- reziduum r_n je monotónní funkce, ze které již nelze extrahovat IMF složky

Původní signál je tedy za předem zvolených podmínek pro ukončení dekompozice rozložen do n IMF komponent (módů).

$$s(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i + r_n$$

EMD – c1 – c6 a r6



Použití HHT v diagnostice

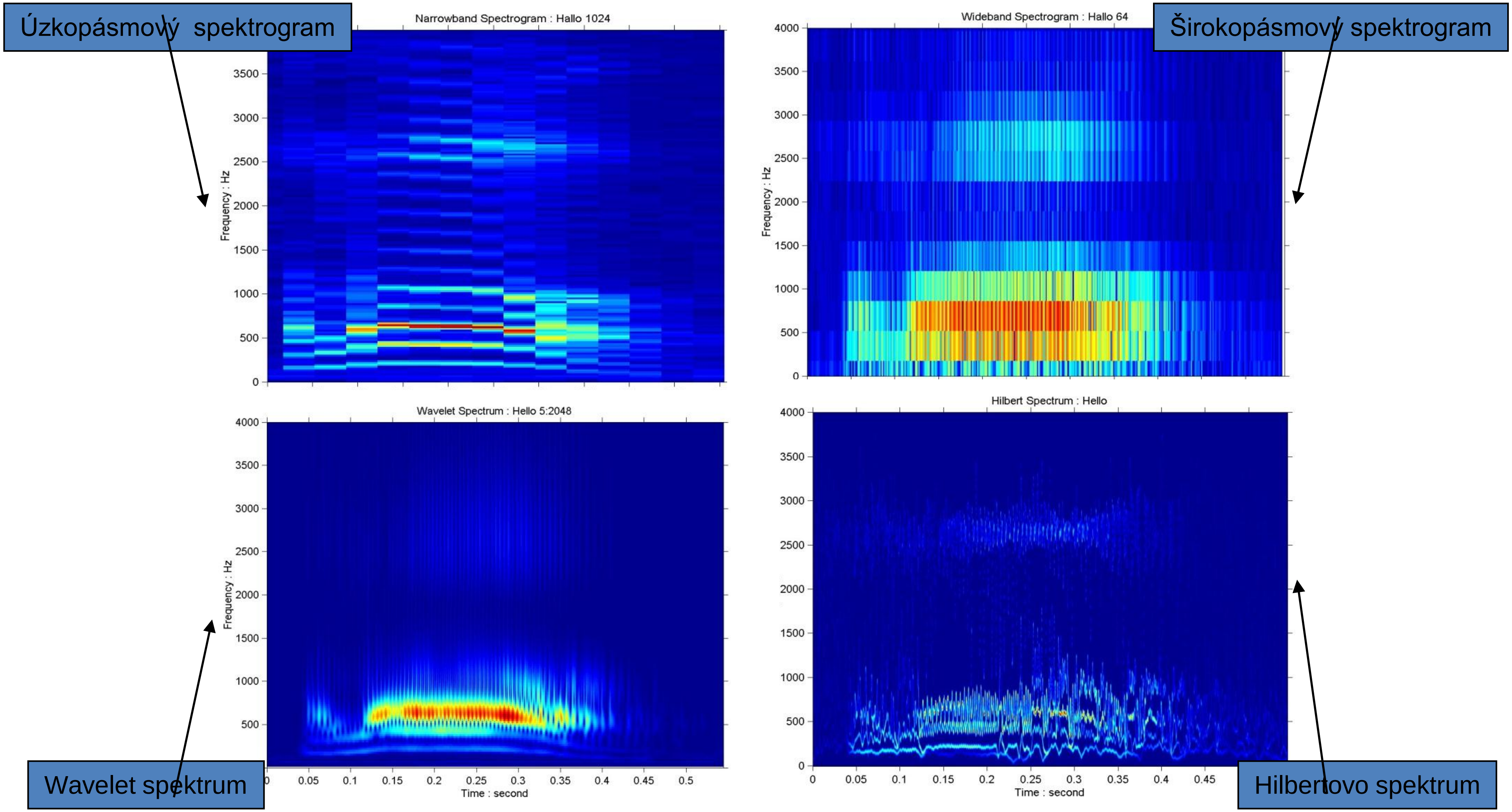
- Data z většiny reálných procesů jsou nestacionární, nelineární, nebo příliš krátká (vzhledem k možnostem měření)

- **Okamžitá frekvence** – získávána pomocí **Hilbertovy transformace**

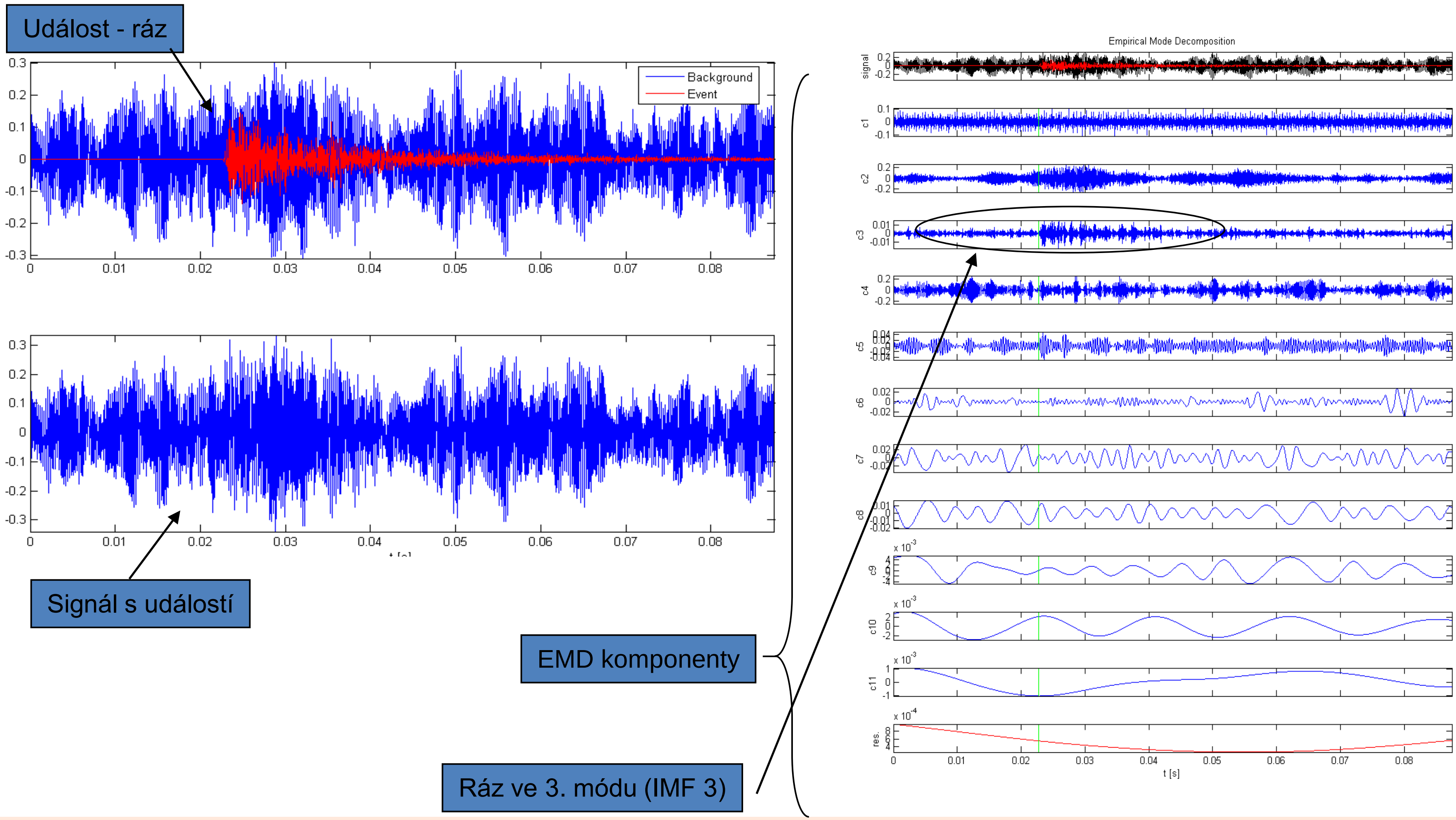
- **Hilbert-Huangova transformace** – využití tzv. **empirické modální dekompozice** k rozložení signálu do jednotlivých komponent s „dobře definovanou okamžitou frekvencí“

- EMD velmi dobře použitelná pro filtraci, resp. vyhlazování signálů – nedochází k fázovým posunům v signálu

Analýza řečového signálu – „Hello “ data

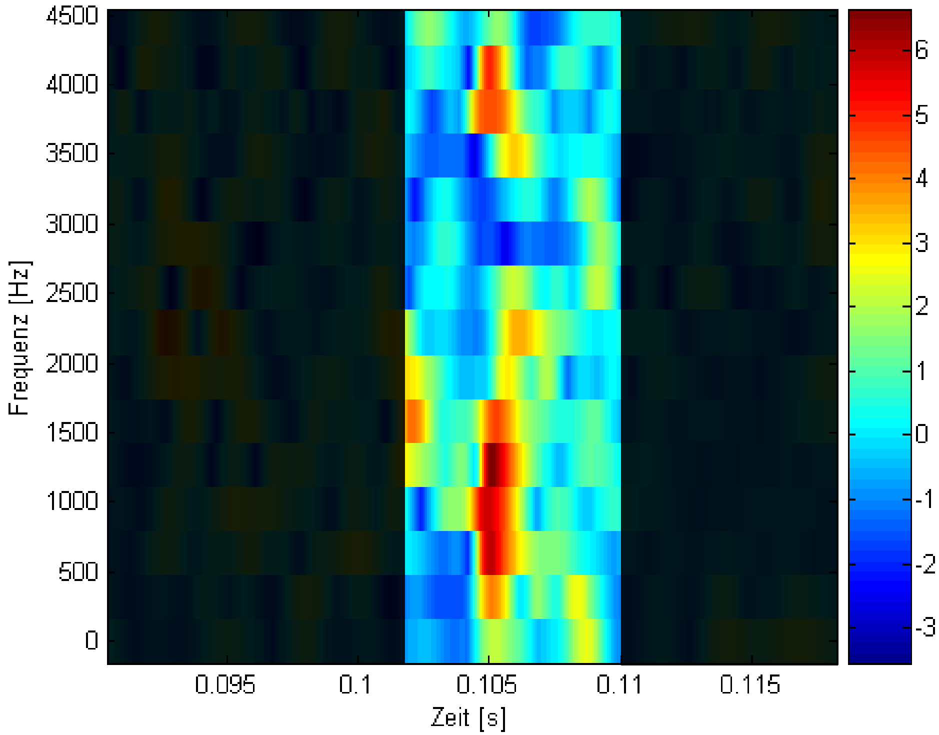


HHT – diagnostika v energetice

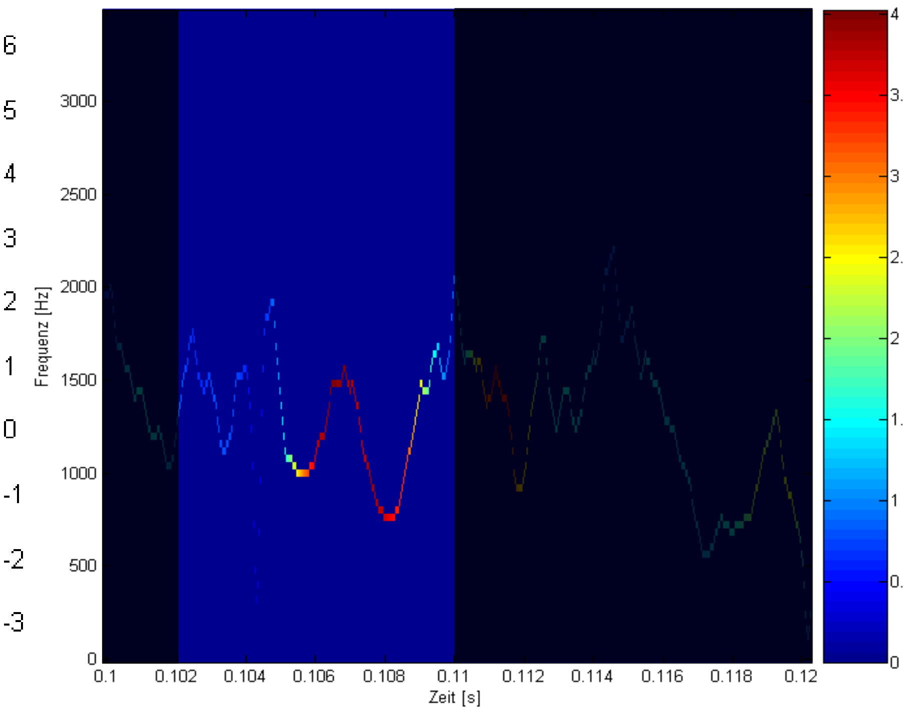


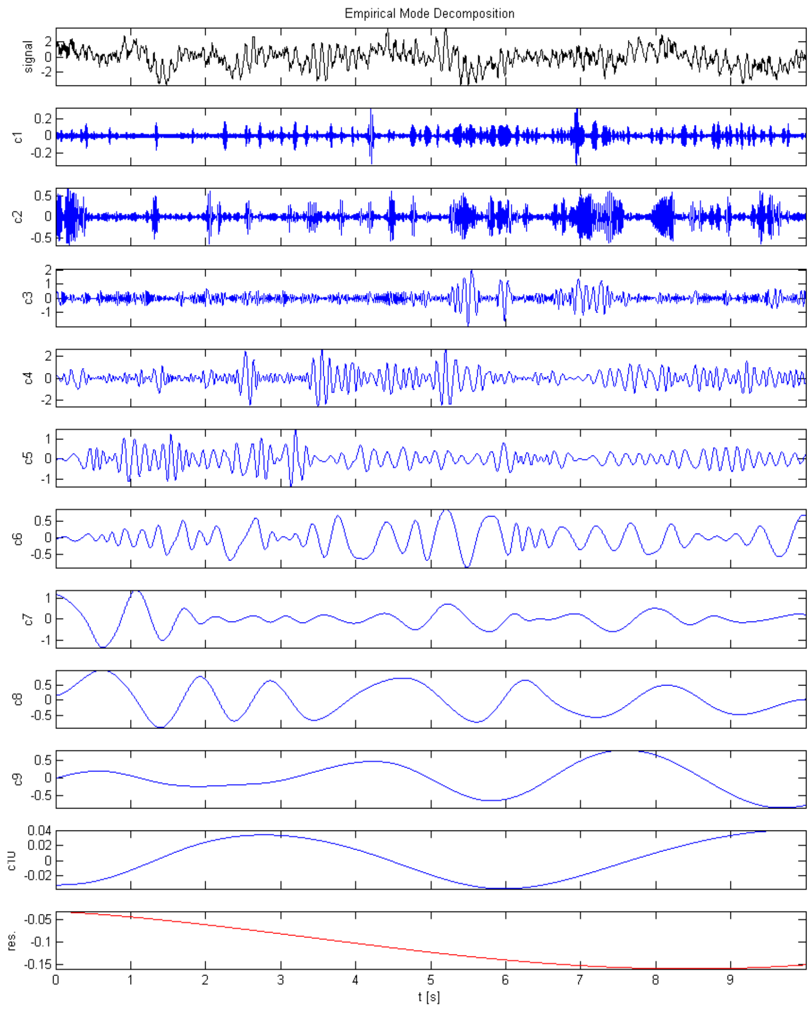
HHT – diagnostika v energetice

Spektrogram

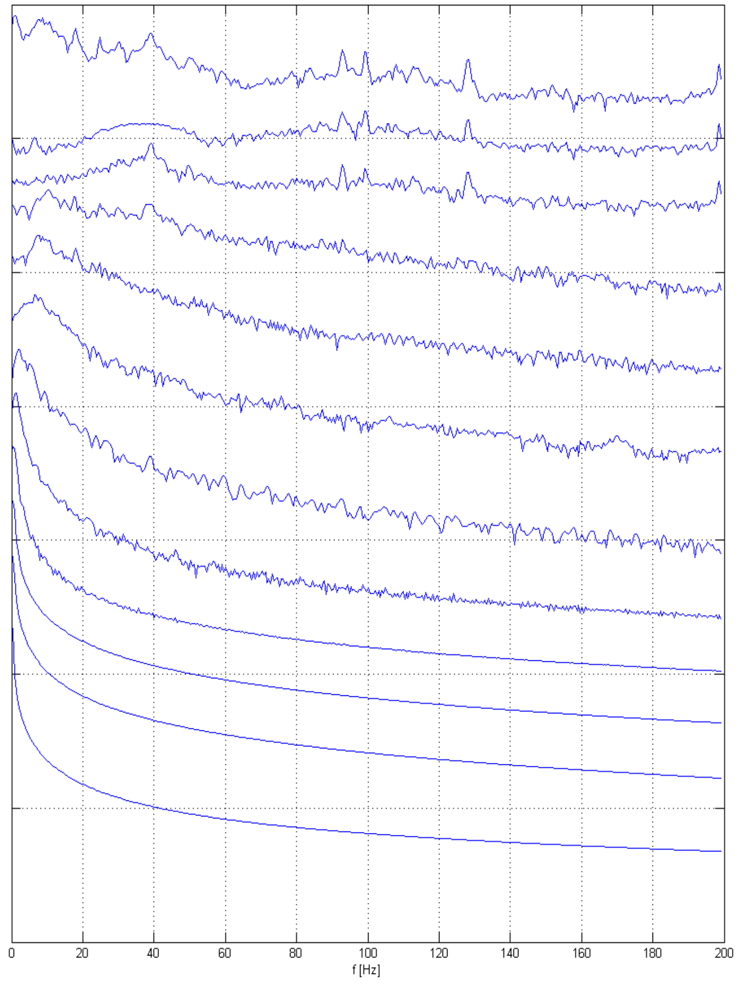


Hilbertovo spektrum





Empirical Mode Decomposition
signal
c1
c2
c3
c4
c5
c6
c7
c8
c9
c10
res.
t [s]

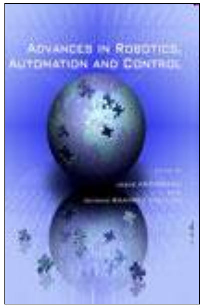


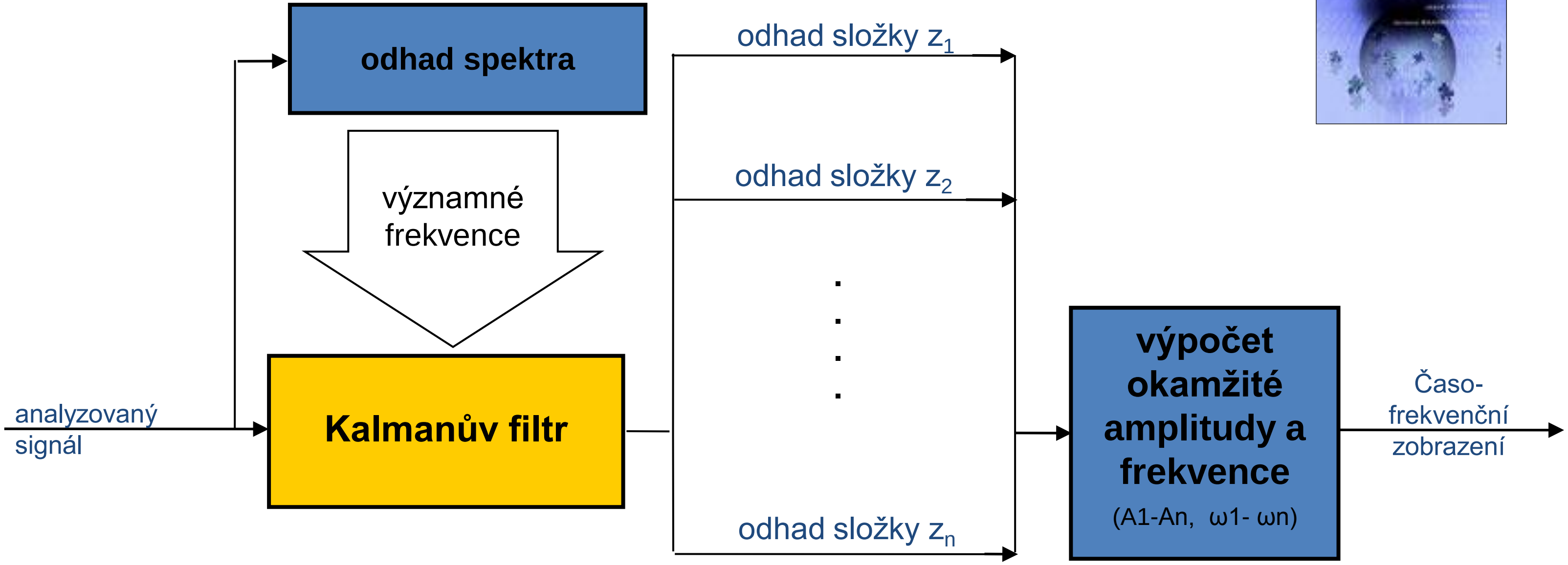
f [Hz]

VYUŽITÍ KALMANOVA FILTRU V DIAGNOSTICE

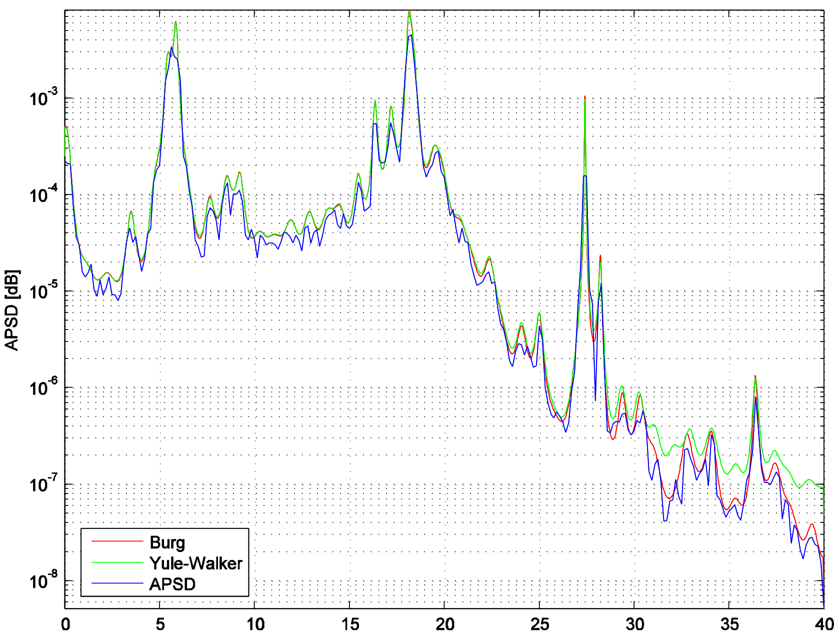
Metoda Kalmanova filtru

- rekurzivní metoda odhadu komplexních složek signálu
- významné složky signálu určeny odhadem spektra signálu
- složky $z_1 \ldots z_n$ jsou definovány v každém vzorku analyzovaného signálu
- teorie metody publikována jako kapitola v knize: Robotics, Automation and Control

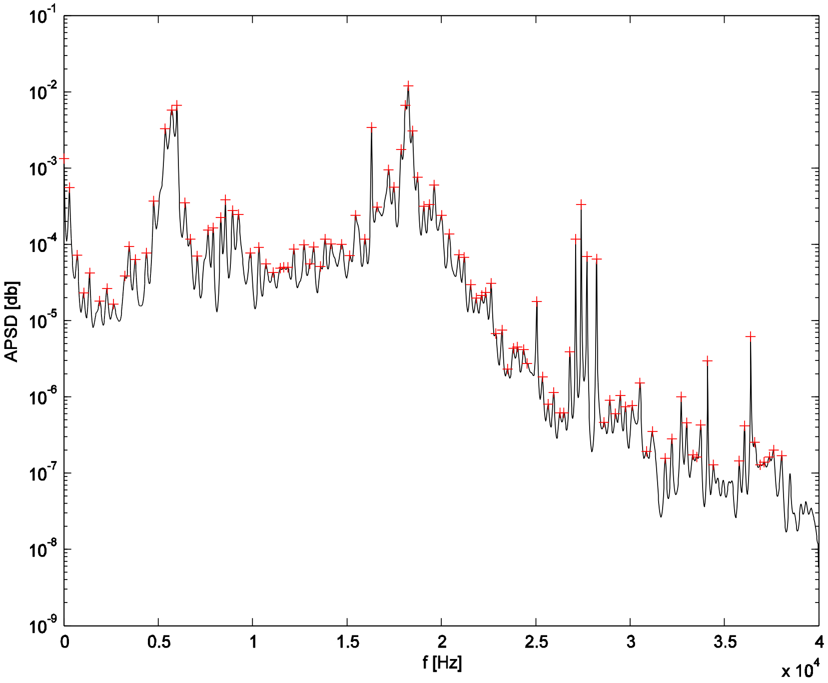




Určení frekvenčních parametrů modelu



Spektrální výkonová hustota a její odhady



Odhad výkonové spektra akustického signálu a zvolené frekvence modelu (červeně)

Model komplexního signálu s využitím soustavy rezonátorů

Mějme analyzovaný signál, který byl získán měřením mechanických vibrací pomocí akcelerometru na určitém reálném zařízení.

$$s_r(t) = \sum_{n=1}^{N} s_r^{(n)}(t) + \rho(t)$$

který se skládá ze šumu reprezentujícího jakékoli nežádoucí (nemodelované) složky signálu a z N monokomponentních složek. Každá z N složek je pak popsána amplitudovou obálkou a a frekvencí ω.

$$s_r^{(n)}(t) = a_n \cdot \cos(\omega_n \cdot t)$$

$$\dot{s}_r^{(n)}(t) = -a_n \cdot \omega_n \cdot \sin(\omega_n \cdot t) \qquad \ddot{s}_r^{(n)}(t) = -a_n \cdot \omega_n{}^2 \cos(\omega_n \cdot t) = -\omega_n \cdot s_r^{(n)}(t)$$

Předpokládejme dále, že systém generující jednoduchý kmitavý pohyb můžeme popsat autoregresním (AR) stavovým modelem druhého řádu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_r^{(n)}(t) \\ \dot{x}_i^{(n)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_n \\ \omega_n & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(t) \\ x_i^{(n)}(t) \end{bmatrix} \qquad y_n(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(t) \\ x_i^{(n)}(t) \end{bmatrix}$$

Odhad složek signálu pomocí KF – matice KF

Stavový model frekvenční složky signálu

$$\begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k+1) \\ x_i^{(n)}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(h\cdot\omega_n) & -\sin(h\cdot\omega_n) \\ \sin(h\cdot\omega_n) & \cos(h\cdot\omega_n) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k) \\ x_i^{(n)}(k) \end{bmatrix} + \Gamma(k)\cdot\xi(k)$$

$$y_n(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_r^{(n)}(k) \\ x_i^{(n)}(k) \end{bmatrix}$$

Zobecněná výstupní rovnice pro všechny složky signálu

$$y(k) = C\cdot x(k) + \Delta\cdot\eta(k)$$

$$\underbrace{\Delta}_{1\times 1} \quad ; \quad C = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{1\times 2n};$$

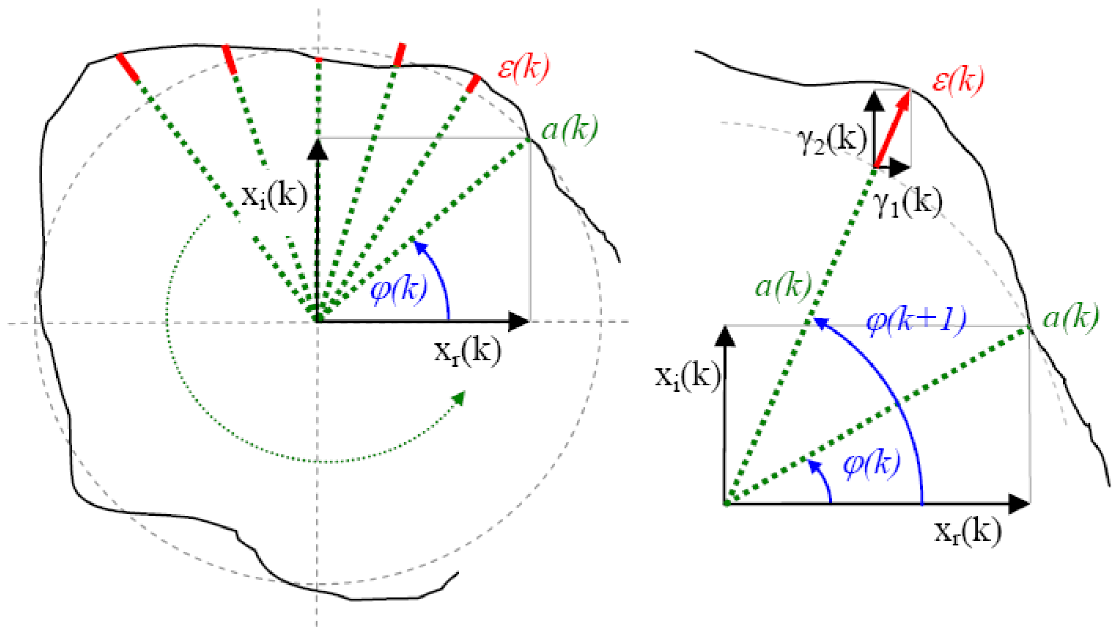
Stavová matice Kalmanova filtru

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_n \end{bmatrix}}_{2n\times 2n};$$

Kovarianční matice stavového šumu

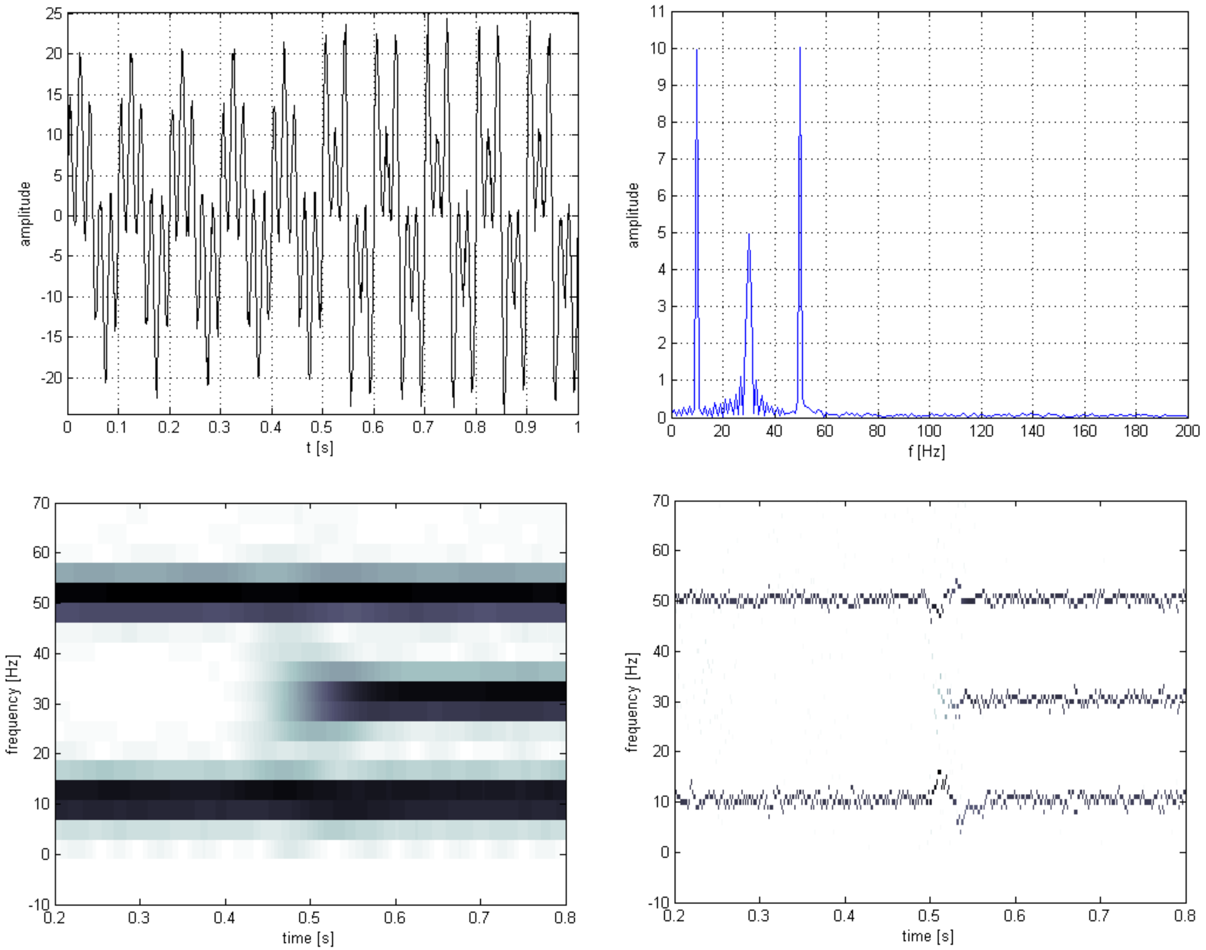
$$\Gamma = \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \Gamma_n \end{bmatrix}}_{2n\times 1}$$

Odhad složek signálu pomocí KF – kovarianční matice stavového šumu



$$\Gamma(k)=\begin{bmatrix}\gamma_1(k)\\ \gamma_2(k)\end{bmatrix}=A\cdot\begin{bmatrix}x_r(k)\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_\varepsilon{}^2}{x_r(k)^2+x_i(k)^2}}\\ x_i(k)\cdot\sqrt{\dfrac{\sigma_\varepsilon{}^2}{x_r(k)^2+x_i(k)^2}}\end{bmatrix}$$

Dekompozice syntetického signálu 1



3 harmonické složky

f_1 = *10Hz*

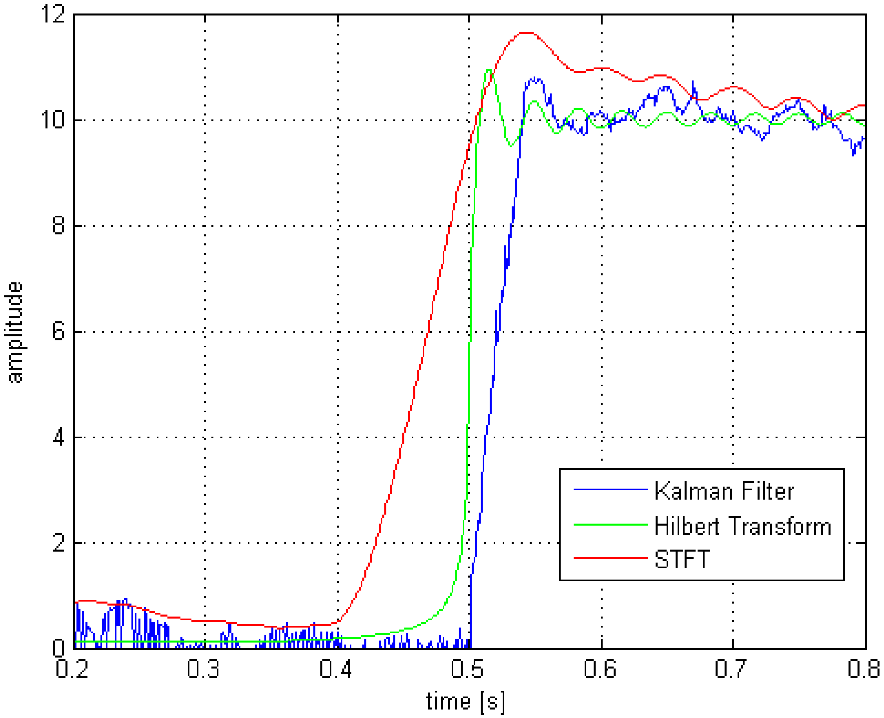
f_2 = *30Hz*

f_3 = *50Hz*

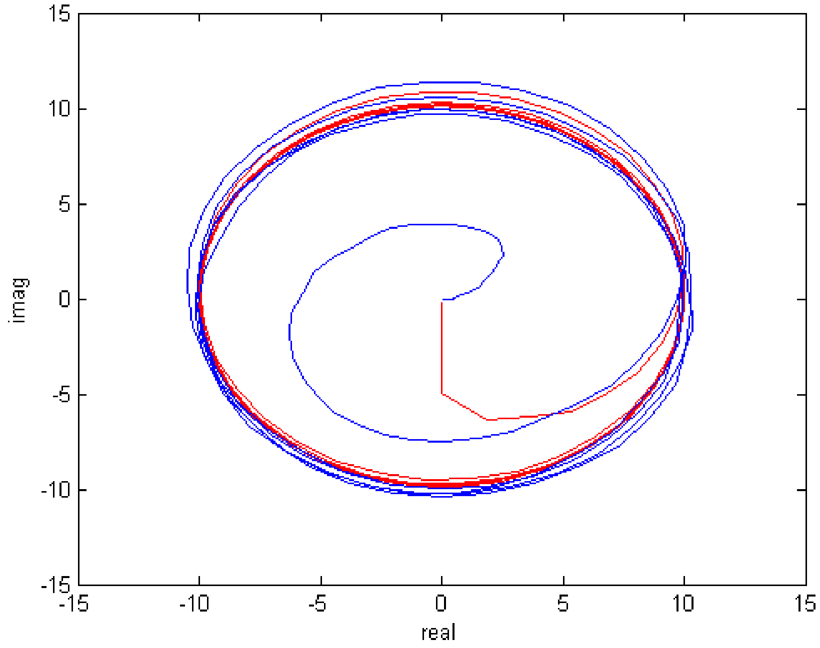
A = 10

Aditivní šum: $m_\eta = 0$, $\sigma_\eta^{\ 2} = 1$

Dekompozice syntetického signálu 1

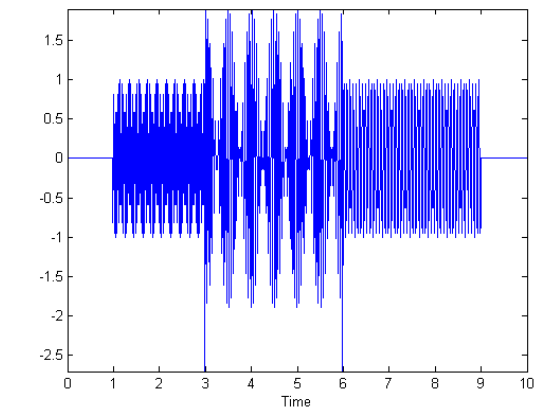


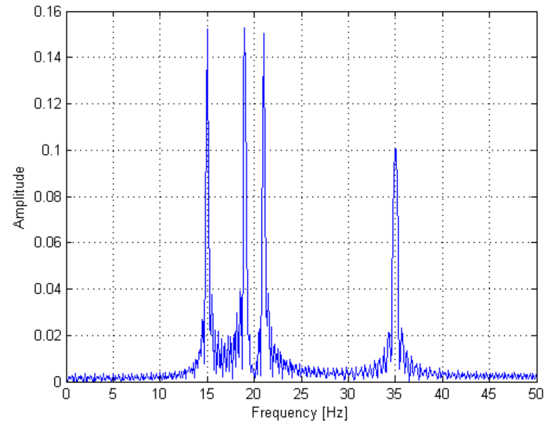
Porovnání změny amplitudy 2. složky signálu



Porovnání 2 složky signálu po Hilbertově transformaci (červeně) a dekompozici metodou Kalmanova filtru (modře).

Dekompozice syntetického signálu 2

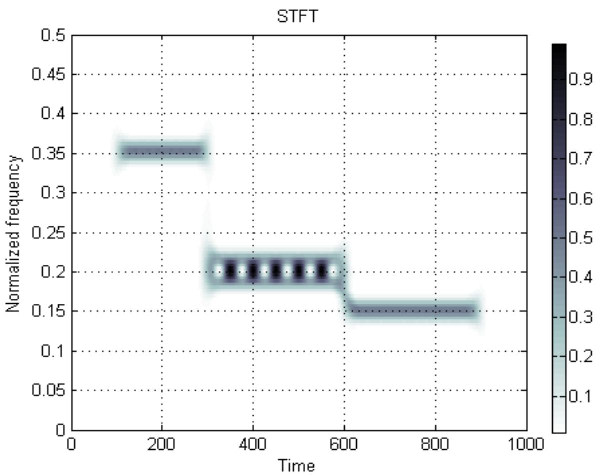


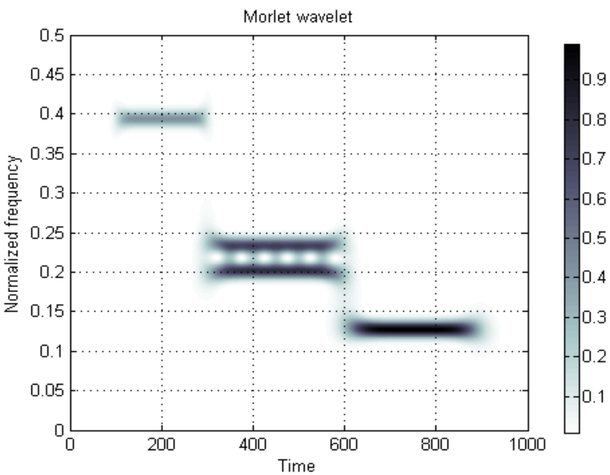


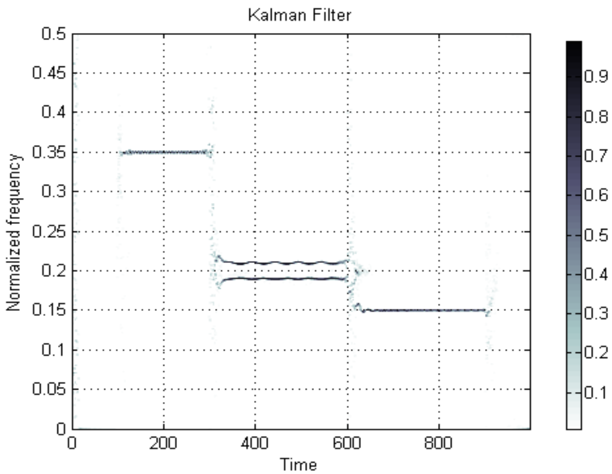
4 harmonické složky

t_0 = *100*
t_{end} = *900*

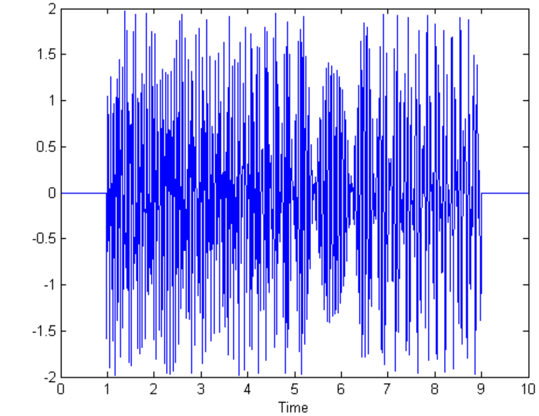
Změny frekvencí:
t_{ch1} = *300*
t_{ch2} = *600*

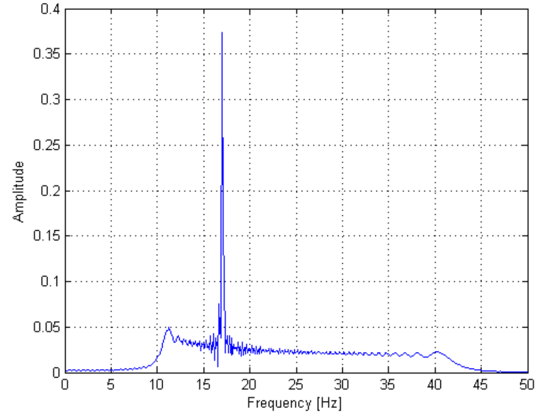






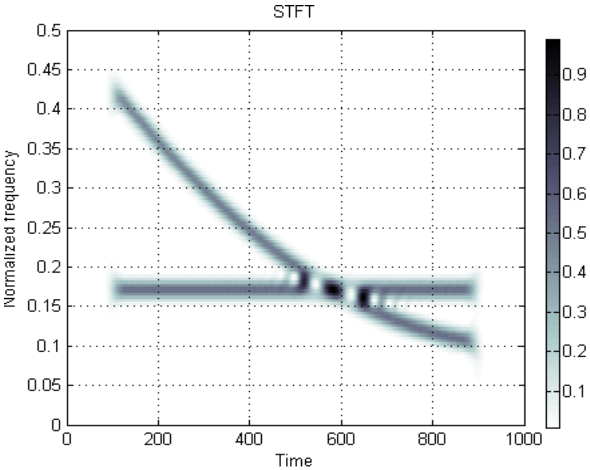
Dekompozice syntetického signálu 3

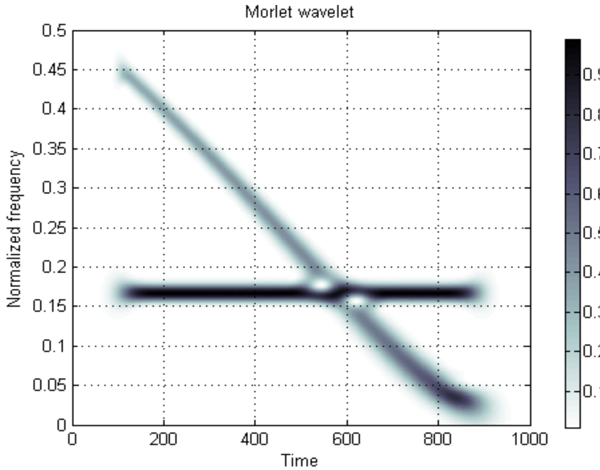


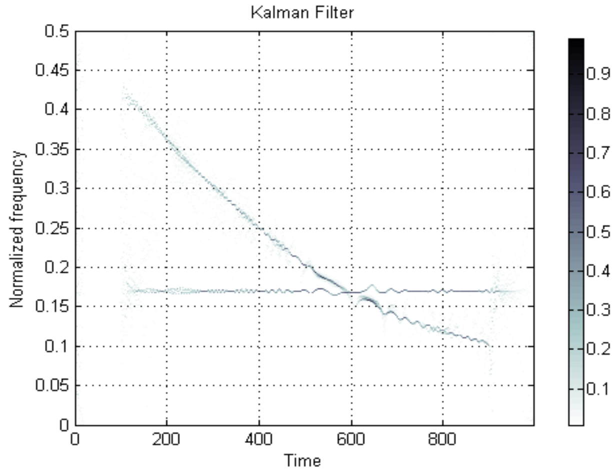


Parabolický (konkávní) „chirp“ signál se stacionární harmonickou složkou

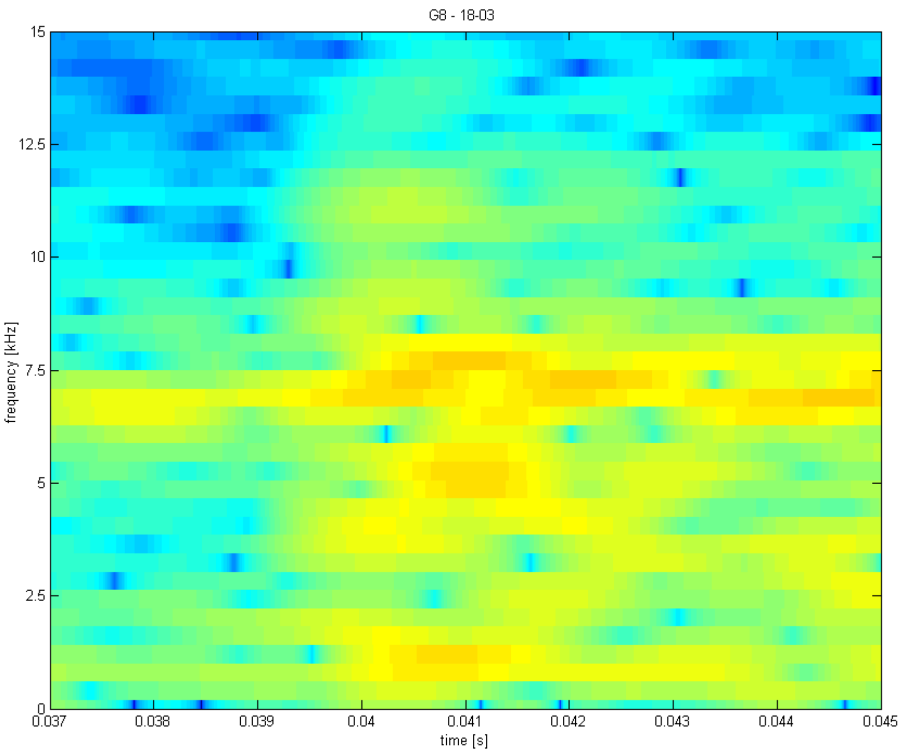
$t_0 = 100$
$t_{end} = 900$



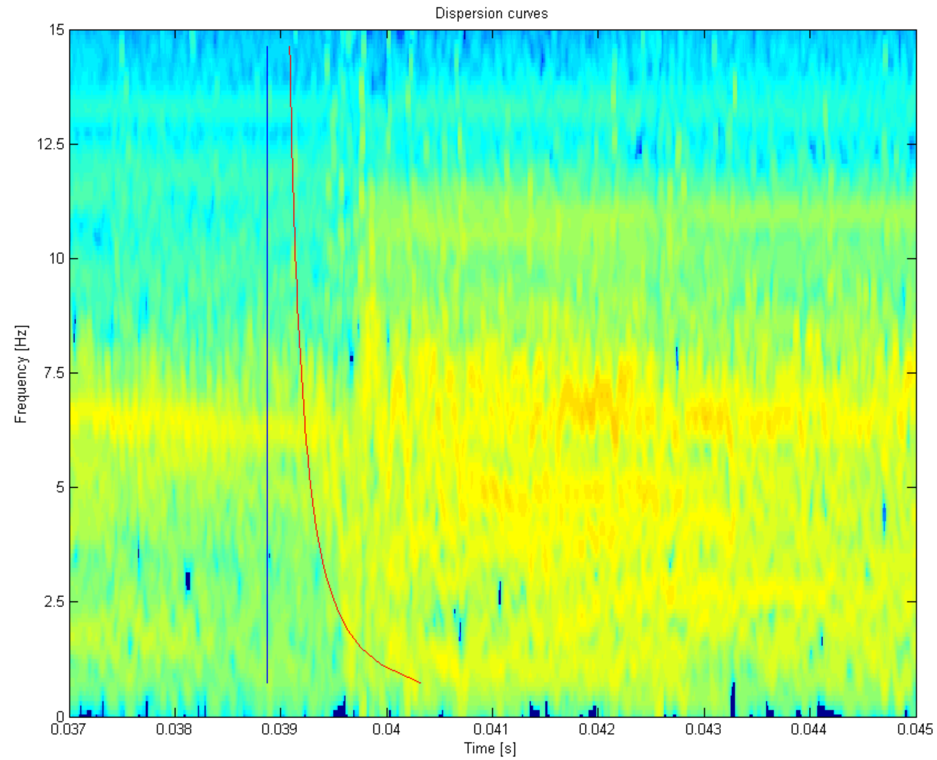




Lokalizace rázů na AGR



Časo-frekvenční reprezentace události na senzoru G08 pomocí STFT



Časo-frekvenční reprezentace události na senzoru G08 pomocí metody Kalmanova filtru

PRINCIPY A POSTUPY METOD VYUŽÍVANÝCH V DIAGNOSTICE

Přehled metod

Statistické metody

- Činitel výkmitu - crest-faktor
- K - hodnota
- Kurtosis

Rezonanční metody (rezonance snímače)

- SPM / BCU
- Metoda špičkové energie

Frekvenční metody

- Obálková metoda
- Kepstrální analýza

- Podíl KRMS/LRMS

Činitel výkmitu (crest-factor)

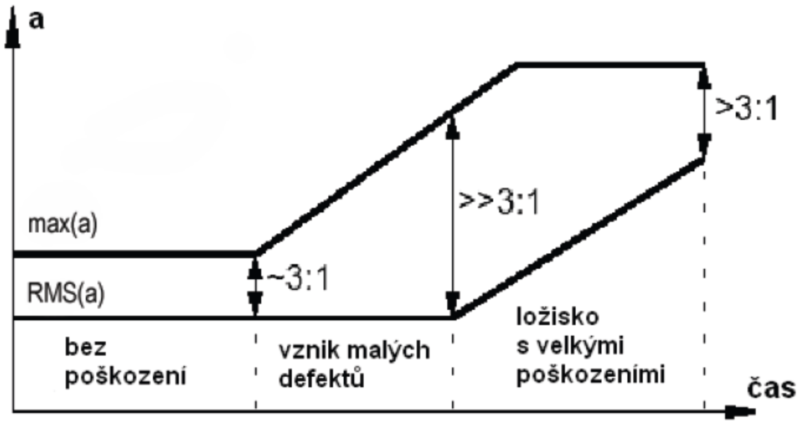
Metoda je založena na faktu, že periodicky se opakující vibrační ráz lze s postačujícím rozlišením vyhodnotit z výkmitu měřeného vibračního signálu. Tento výkmit je však prakticky neměřitelný jako efektivní hodnota v daném kmitočtovém rozsahu. Zhoršující se technický stav se projevuje nárůstem jak četnosti rázů tak jejich výkmitů. Efektivní hodnota vibračního signálu se zvětšuje se zvyšující se četností rázů, zatímco se hodnota výkmitů stabilizuje

- podíl mezi maximální a efektivní hodnotou vibrací (zrychlení). Vyhodnocuje se z časového signálu (frekvenční pásmo 10Hz – 10kHz)

$$c_f = \frac{\hat{a}}{a_{eff}}$$

Činitel výkmitu (crest-factor)

Princip metody je použit například v přístrojích B&K 2513 firmy Brüel&-Kjaer a VM15 firmy Metra Mess- und Frequenztechnik



stav ložiska	$RMS(a)$	$max(a)$	$\frac{max(a)}{RMS(a)}$	$max(a) \cdot RMS(a)$
bez poškození	malá	malá	≈ 3	malý
počátek poškození	malá	zvýšená	> 3	lehce zvýšený
rozšiřující se poškození	zvýšená	zvýšená	> 3	středně zvýšený
velké poškození	zvýšená	velká	$\gg 3$	zvýšený
ložisko před výměnou	velká	velká	> 3	velký

Tato metoda je rychlá a laciná, ale není příliš přesná co se týče stanovení stupně poškození. Poskytuje jen hrubou orientaci o úrovni poškození. Je navíc nevýhodná při parazitních zdrojích kmitů.

K-hodnota

- zohledňuje efektivní a maximální (špičkové) hodnoty při stavu bez poškození a v aktuálním stavu

$$K(t) = \frac{a_{eff}(0) \cdot \hat{a}(0)}{a_{eff}(t) \cdot \hat{a}(t)}$$

K-hodnota

K tomu, aby mohlo být rozhodnuto o aktuálním stavu, jsou stanoveny hladiny parametru K(t), které vycházejí z dlouholetých zkušeností a poznatků (viz tabulka).

$K(t)$	**stav ložiska**
> 1	zlepšený
$1 - 0.5$	dobrý stav
$0.5 - 0.2$	vlivy urychlující poškození
$0.2 - 0.02$	postupující proces poškození
< 0.02	ložisko před výměnou (poškození)

Metoda parametru K(t) je rychlá a nenáročná a oproti srovnatelným metodám spočívá její výhoda v diagnostikovatelnosti většího množství zdrojů poškození. Nebylo zjištěno omezení její platnosti. Metoda parametru K(t) vyžaduje sledování otáček zařízení, neboť parametr K(t) je silně závislý na otáčkách.

Kurtosis

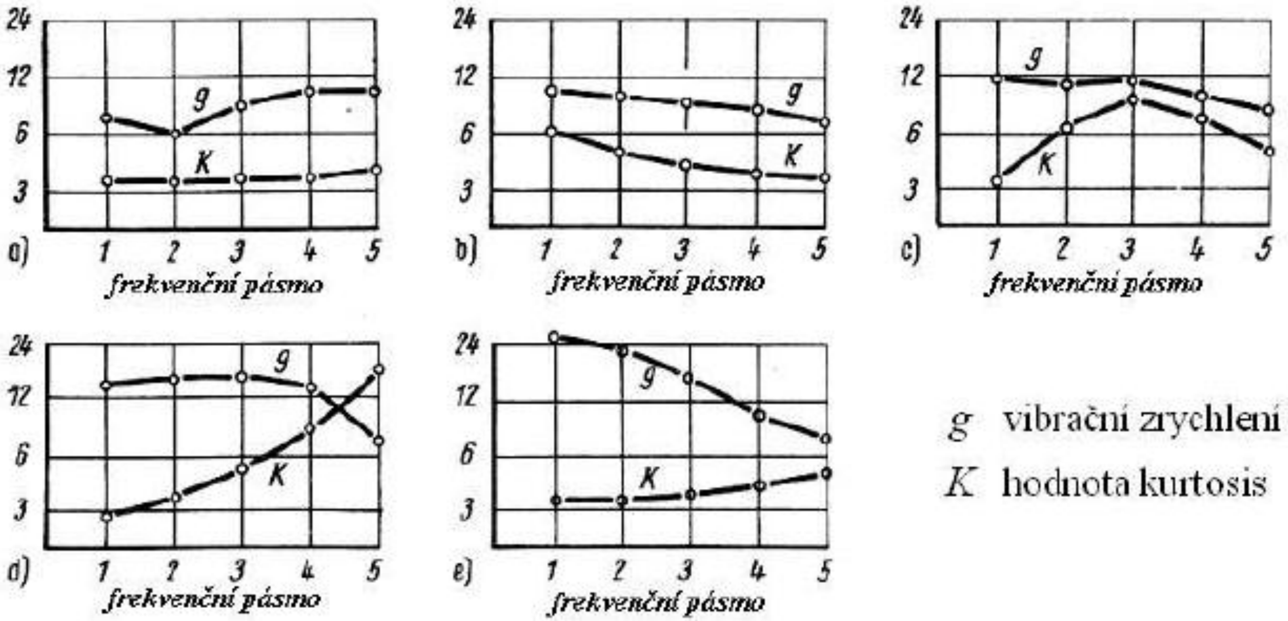
Metoda Kurtosis se nespoléhá na měření absolutní velikosti vibrací. Způsob výpočtu veličiny je založen na rozdělení amplitud signálu.

$$K = \frac{\int (x - \bar{x}^4) p(x) dx}{\sigma^4}$$

Nepoškozené ložisko emituje stochastické kmitání, které má gaussovo normální rozdělení pravděpodobnosti a hodnota K pro toto rozdělení je K=3. Tuto hodnotu můžeme naměřit v širokém pásmu od 2,5 kHz do 80 kHz s odchylkami +- 8% (nezávisle na zatížení a otáčkách). S postupujícím poškozením roste koeficient K v nižším frekvenčním pásmu. Velké poškození vede k nárůstu hodnoty K ve vyšších frekvencích, zatímco v nízkých frekvencích se koeficient K vrací zpět na svou původní hodnotu.Míra poškození určovaná Kurtosis faktorem se proto odhaduje v pěti frekvenčních pásmech.

pásmo 1:	2,5kHz	-	5kHz
pásmo 2:	5kHz	-	10kHz
pásmo 3:	10kHz	-	20kHz
pásmo 4:	20kHz	-	40kHz
pásmo 5:	40kHz	-	80kHz

Kurtosis



Hodnota parametru K a vibračního zrychlení pro různé stavy ložiska: a) nepoškozené, b) začínající poškození, c) poškození s velkým plošným rozsahem, d) velké poškození s rizikem havárie, e) stav bezprostředně před havárií

Na poškození, projevující se vysokými, ale úzkými pulzy, reaguje Kurtosis faktor silným růstem. Také tady platí, že metoda je tím přesnější, čím se poškození projevuje vyššími a užšími pulzy v měřeném vibračním signálu.

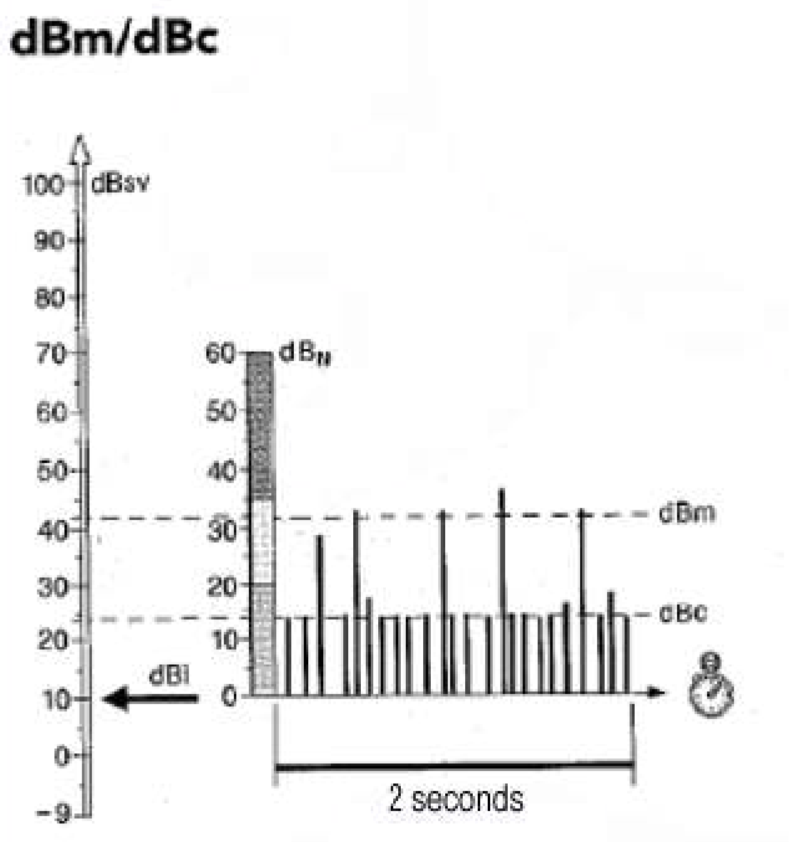
Metoda rázových pulsů – SPM (Shock Pulse Method)

Princip spočívá v měření a posouzení rázových pulzů.

V měřícím zařízení je signál filtrován pásmovou propustí se střední frekvencí pásma v okolí rezonanční frekvence snímače. (nejčastěji cca 35 kHz).

K určení vlastního stavu je monitorována maximální hodnota špičky impulsu (shock value) v signálu, jejíž nárůst poukazuje na počínající poškození v drahách ložiska. V prahové hodnotě (carpet value) je shrnut vibrační šum ložiska. Nárůst této hodnoty zpravidla poukazuje na problémy s mazáním.

Používá se logartimické zobrazení a veličiny jsou pak označovány jako dB_m (maximum) a dB_c (carpet) a technika se nazývá dB_m/dB_c



Metoda rázových pulsů – SPM (Shock Pulse Method)

Typické pro tyto veličiny je, že úroveň signálu je ovlivňována různými parametry, např. rychlost rotace, útlum signálu, kvalita mazání. Aby mohl být stav ložiska posuzován objektivněji a aby mohla být posuzována různá ložiska navzájem, je nutné provádět měření ložiska v dobrém stavu (nově osazené ložisko) a hodnoty metody normovat. Diference špičkové a prahové hodnoty se blíží svými vlastnostmi činiteli výkmitu (crest-factor).

Normování vychází z rozměrů ložiska a z otáček a použitím těchto parametrů získáme pro nelogaritmované hodnoty koeficient z tabulky nebo normogramu. Pro logaritmované hodnoty je výpočet normované veličiny snažší. Tato hodnota je pak označována jako dB_N a vychází ze vztahu:

$$dB_N = dB_{SV} - dB_i$$

$$dB_i = 20 \cdot (\log n + 0.6 \cdot \log D - \log 2150)$$

dB_N	Stav ložiska
$0 - 20$	dobrý stav
$20 - 35$	pozorování začátku poškození
> 35	špatný stav

Metoda špičkové energie (Spike energy)

Zpracováván je signál z akcelerometru v oblasti od 100 Hz až do 65 kHz. Spodní hranice pásmové propusti f_low je přitom volitelná v rozmezí f_low = 100 Hz ... 5000 Hz.

Dále je definována očekávaná frekvence poškození ložiska f_D, požadovaný počet harmonických n_SE, které budou k dispozici ve výsledném spektru. Pokud není nastavena očekávaná frekvence poškození f_D, pak je pro další výpočet použita maximální frekvence f_max obsažená v měřeném signálu.

V dalším kroku jsou nastavovány časové konstanty tau _1 a tau _2. Časová konstanta tau _1 je nastavena na hodnotu

tau _1 = 0.000324 s pro f_low = 2kHz ... 5kHz

tau _1 = 0.0069 s pro f_low = 100Hz ... 2kHz

Viz patent: Stoutenbourg et al.: *Adaptive High Frequency Energy Detection.* United States Patent 6,868,348 B1, 15.März 2005

Metoda špičkové energie (Spike energy)

Časová konstanta tau _2 je pak:

$$\tau_2 = \frac{2.07}{2 \cdot \pi \cdot f_D} \qquad \tau_2 = \frac{2.07 \cdot n_{SE}}{2 \cdot \pi \cdot f_{max}}$$

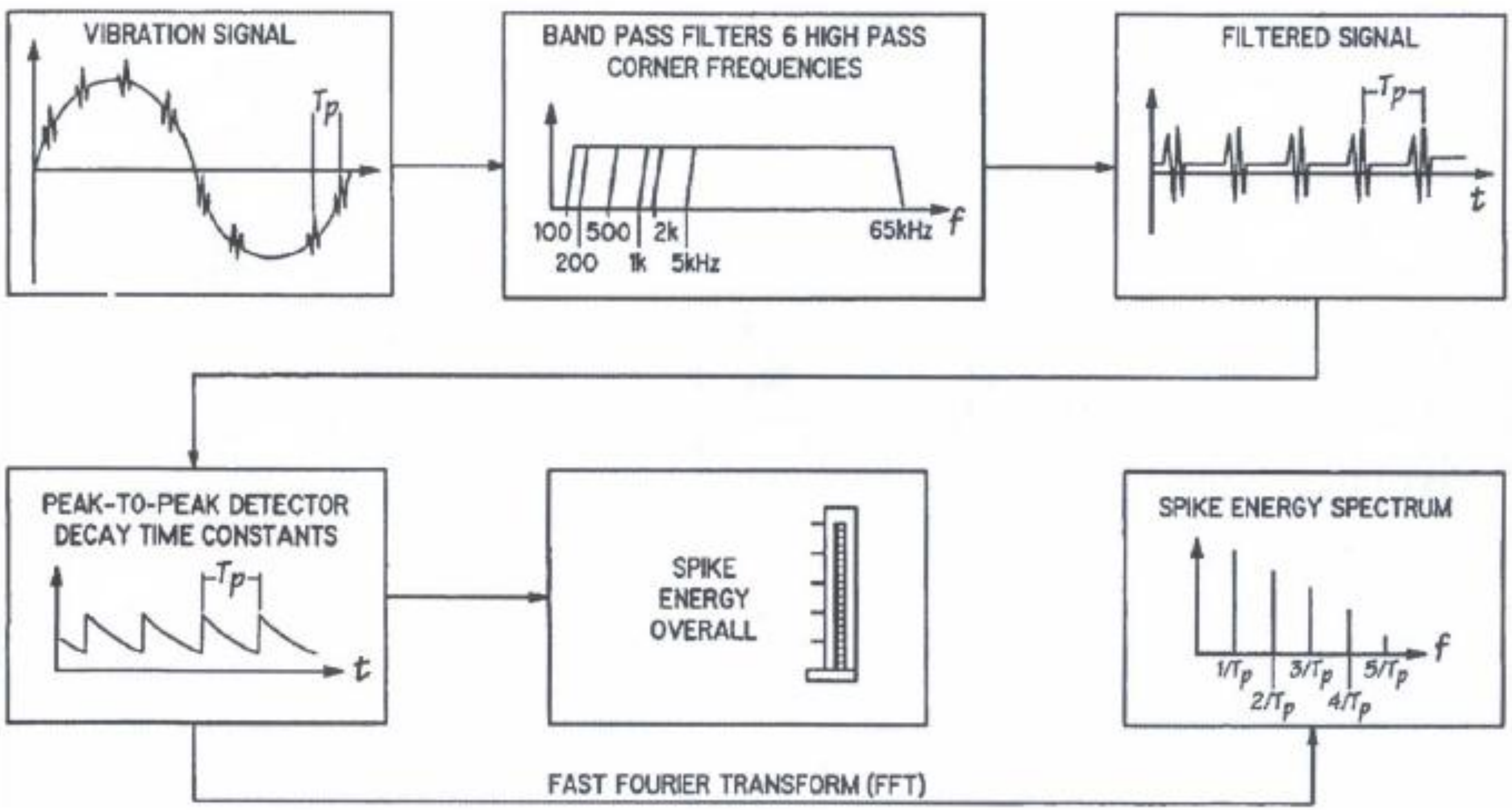
První rovnice definuje tau _2 pro zobrazení frekvence poškození s maximální amplitudou, zatímco druhá rovnice zajišťuje, že bude zobrazeno n_SE harmonických frekvence poškození ložiska.

Po výpočtu těchto parametrů, přichází na řadu vlastní zpracování signálu. Pro každý vzorek signálu z A/D převodníku se počítá odstup aktuálního vzorku od předchozího maximálního záporného impulsu. Pokud je hodnota aktuálního vzorku menší než hodnota maximálního záporného impulsu, pak bude maximální záporný impuls nastaven na tuto hodnotu.

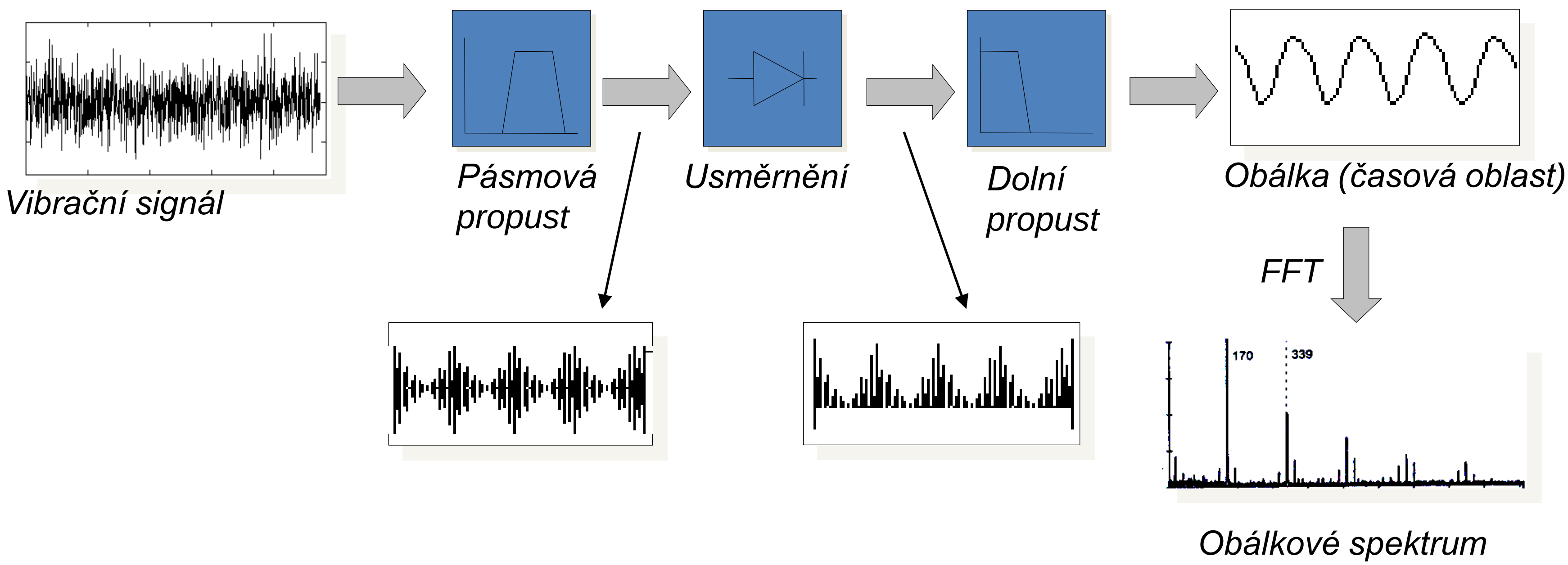
Velikost maximálního záporného impulsu je v každém kroku algoritmu násobena konstantou tlumení $e^{\frac{-T_s}{\tau_1}}$, kde T_s je perioda vzorkování.

Odstup aktuálního vzorku od maximálního záporného impulsu je označován jako peak-to-peak a je v každém kroku násoben konstantou tlumení $e^{\frac{-T_s}{\tau_2}}$

Metoda špičkové energie (Spike energy)



Obálková analýza



Obálková analýza

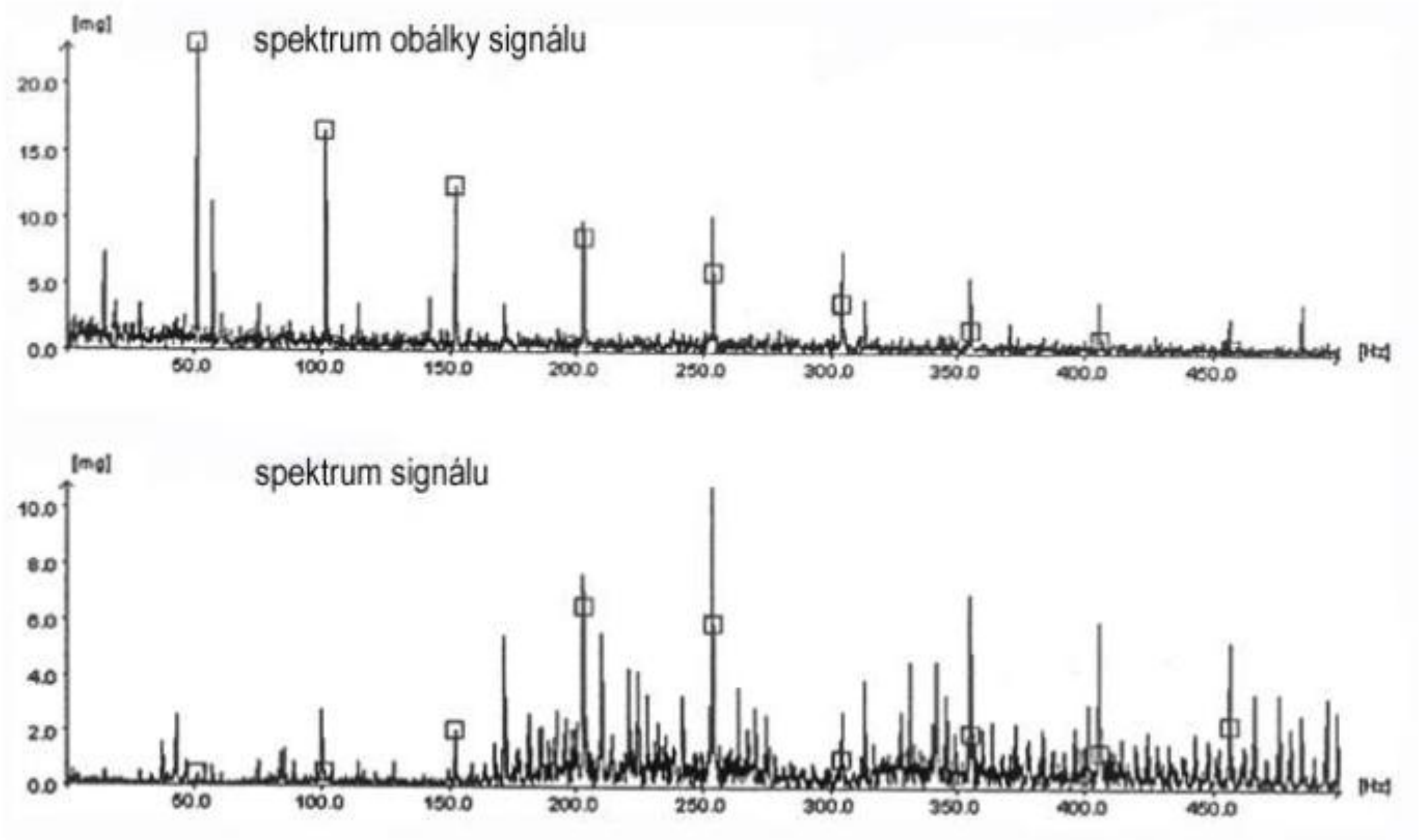
Metoda, kterou mohou být detekovány a monitorovány **opakující se rázy již v raném stadiu jejich vzniku a vývoje**.

Velmi krátké a rychle doznívající pulsy nejsou rozpoznatelné přímou frekvenční analýzou měřeného signálu. K tomu slouží vytvoření obálkové křivky časového signálu. Měřený signál je vlastně superpozicí vibračního signálu ložiska se stacionárním základním kmitáním a rovněž s cizími vibracemi, které se šíří materiálem z okolních částí stroje.

Filtrace horní propustí, nebo pásmovou propustí proto, aby se odstranily vlivy například otáček rotoru a dalších složek, které se projevují v nízkých frekvencích. Signál na výstupu obsahuje jen složky s vysokými kmitočty, ke kterým zaručeně patří i kmitání, impulsy v důsledku rázů.

Následně je filtrovaný signál usměrněn a filtrován dolní propustí. Tento postup odstraňuje nosný signál (vlastní kmitavé pohyby stroje) a výsledkem je obálka původního časového signálu. Signál obálky se dále analyzuje např. pomocí FFT ve frekvenčním spektru.

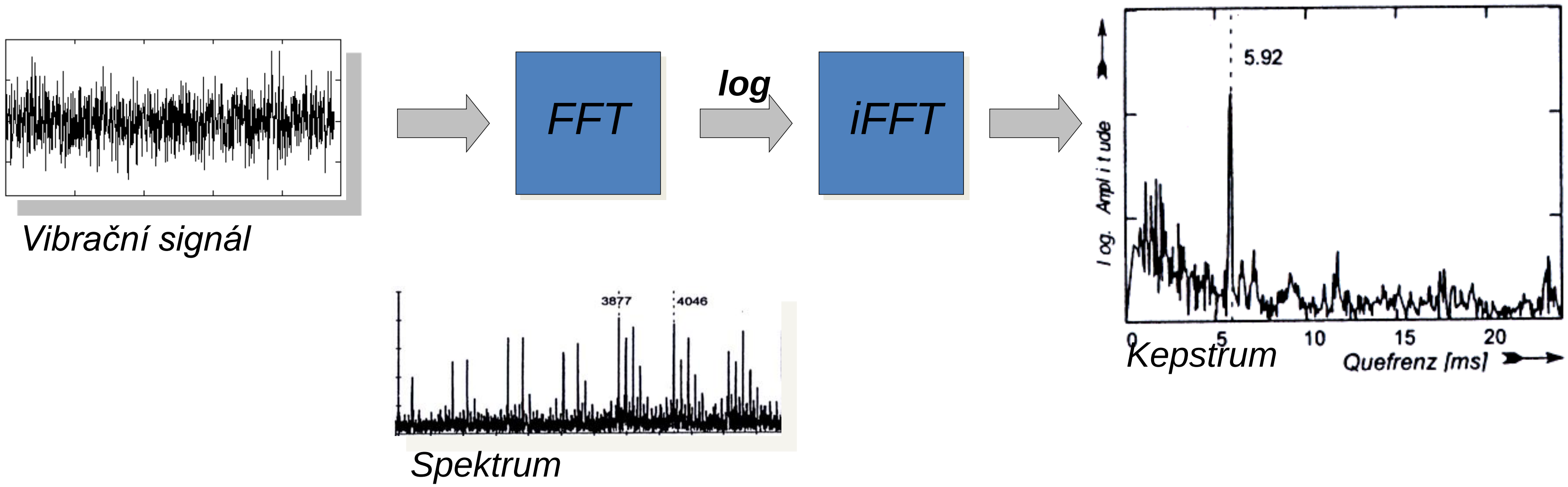
Obálková analýza



Kepstrální analýza

- k rozpoznání periodicit ve frekvenčním spektru

$$c(\tau) = F\left\{\log\left[\left|F\left(x(t)\right)\right|\right]\right\}$$



Podíl KRMS/LRMS

- podíl mezi krátkodobou a dlouhodobou efektivní hodnotou - Pro ohodnocení navýšení intenzity signálu (odhalení nestacionarit z časového signálu)
- při vzniku nestacionarity dojde k navýšení intenzity signálu a tím i k nárůstu efektivní hodnoty
- efektivní hodnota může ale vlivem změn stavu zařízení značně kolísat.
- pro odstranění těchto relativně pomalých změn je krátkodobá efektivní hodnota K-RMS (Kurzzeit-RMS) dělena dlouhodobou efektivní hodnotou L-RMS (Langzeit-RMS).
- délka okna LRMS je řádově větší než u KRMS (jedná se řádově o sekundy, kdežto okno KRMS je v řádu milisekund).

$$k(t) = \frac{KRMS(t)}{LRMS(t)}$$

STOCHASTICKÉ NORMOVÁNÍ V ČASO-FREKVENČNÍ OBLASTI

Normování amplitud frekvenčních složek signálu

$$An(f,t) = \frac{A(f,t) - \mu(f,t)}{\sigma(f,t)}$$

- *A(f,t)* - amplituda časo-frekvenčního spektra
- μ - střední hodnota
- σ - směrodatná odchylka

- Reálné vlastnosti μ a σ analyzovaného signálu nejsou známy
- → použití odhadů střední hodnoty ***m*** a směrodatné odchylky ***s***
- Normované amplitudy ***An(f)*** mají na všech frekvencích nulovou střední hodnotu a jednotkový rozptyl (při neměnných vlastnostech analyzovaného systému)
- Normováním dochází k filtraci rezonancí a strukturálních vibrací

Normování amplitud frekvenčních složek signálu

- **Normování krátkodobých změn parametrů**
- Rekurzivní výpočet odhadů ***m*** a ***s²***

$$m(i) = k_{rec} \cdot m_f(i-1) + (1-k_{rec})A(i)$$

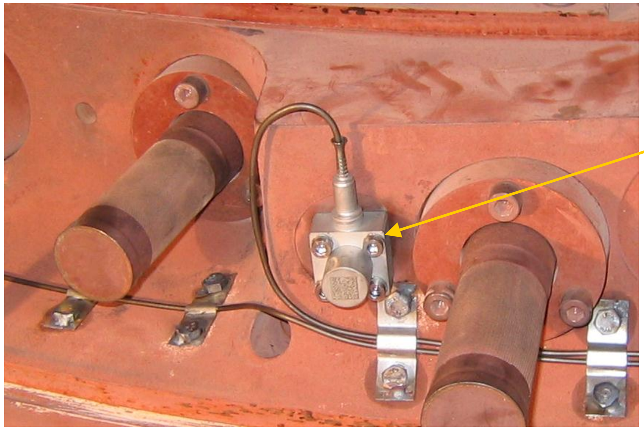
$$s^2(i) = k_{rec} \cdot \; s^2(i-1) + (1-k_{rec})\big(A(i) - m(i)\big)^2$$

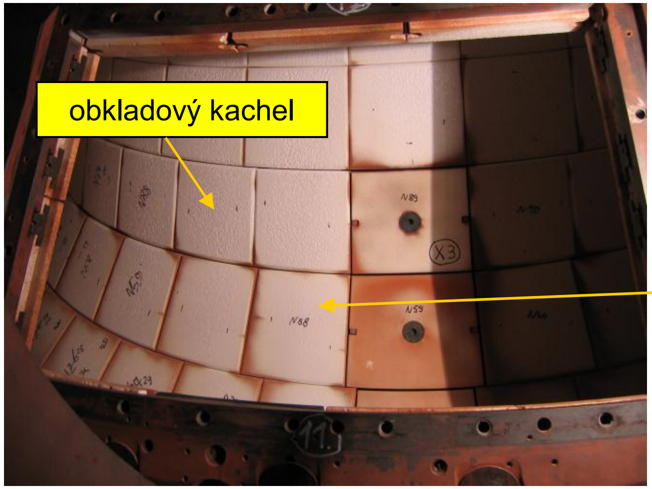
k_{rec} - **koeficient zapomínání** – určuje rychlost (dynamiku) adaptace

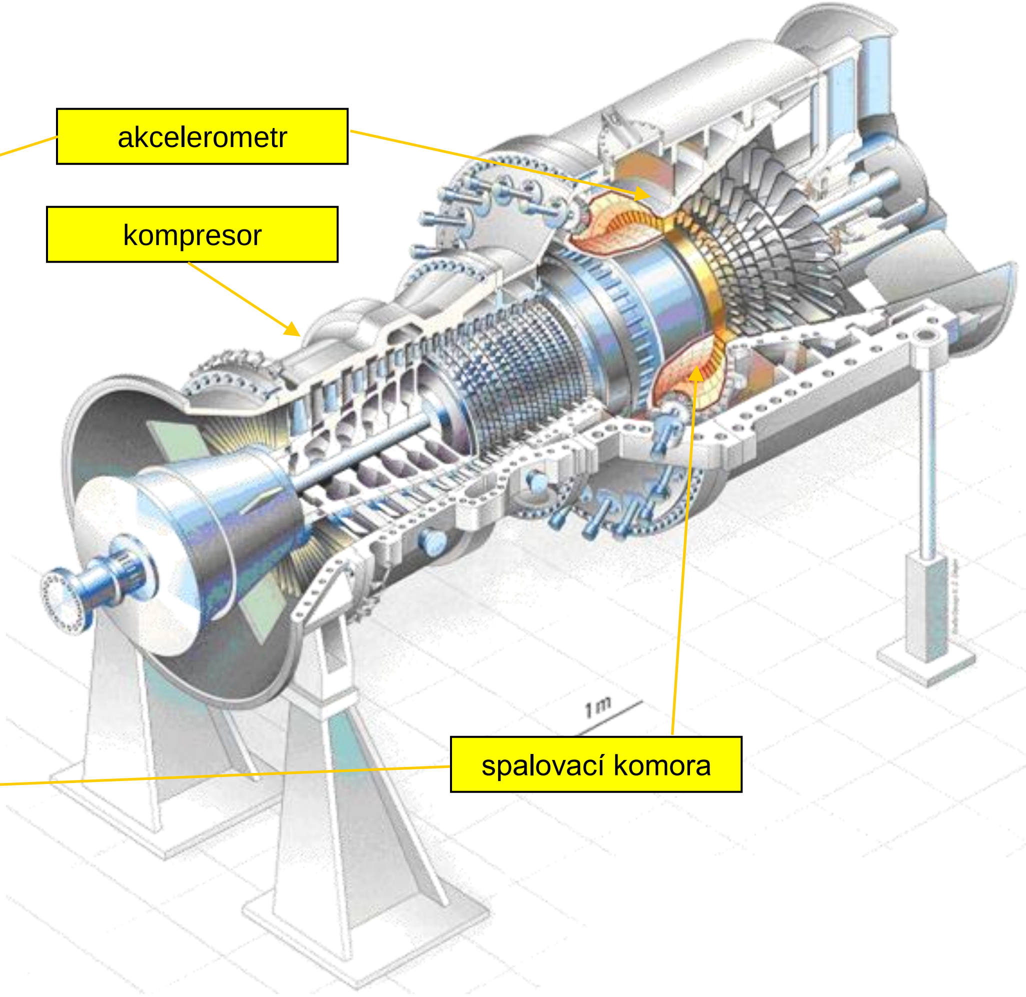
- **normování dlouhodobých změn parametrů**

- normování aktuálních parametrů pomocí odhadů ***m*** a ***s*** vzhledem ke známému stavu zařízení (zařízení bez poškození, stacionární stav, ...)

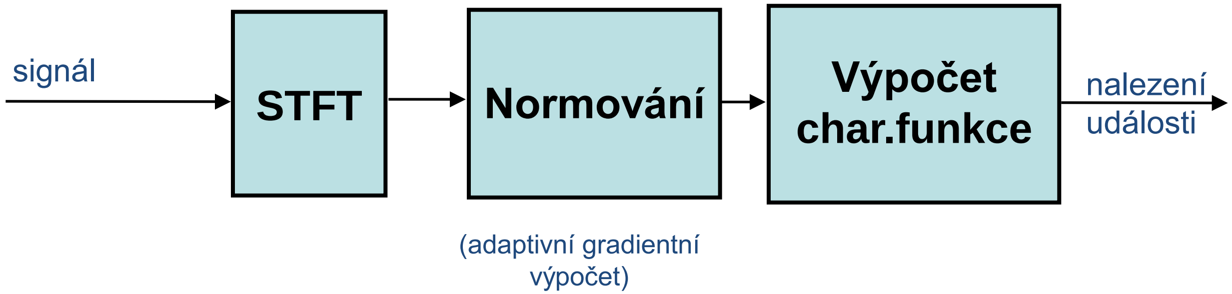
Aplikace – detekce pádu keramického obkladu ve spalovací komoře plynové turbíny



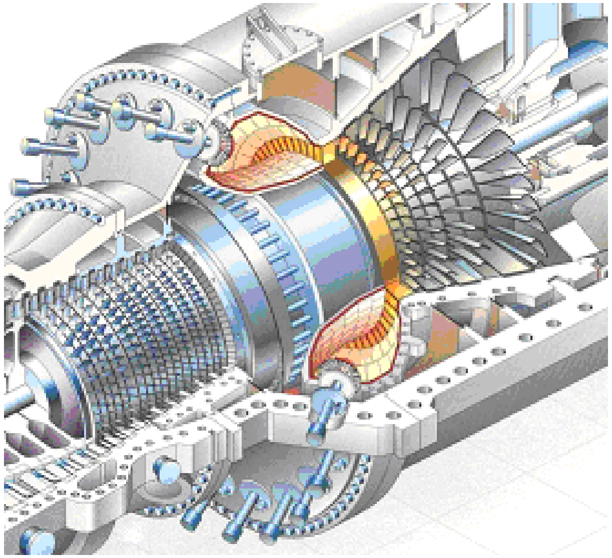




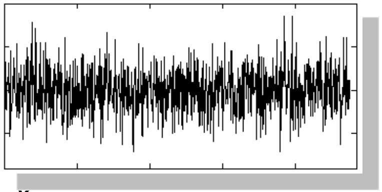
Aplikace – detekce pádu keramického obkladu ve spalovací komoře plynové turbíny



- normování zde probíhá pomocí odadů ***m*** a ***s*** které jsou adaptivně získávány pomocí gradientního rekursivního výpočtu



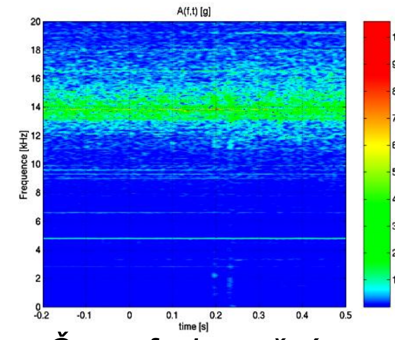
Aplikace – detekce pádu keramického obkladu ve spalovací komoře plynové turbíny



Časový signál

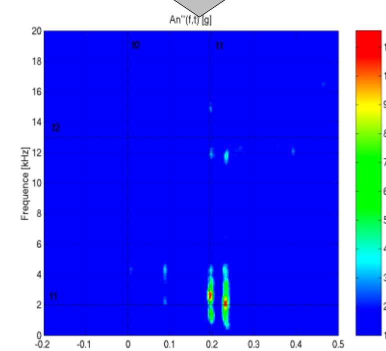
STFT

$A(f,t)$



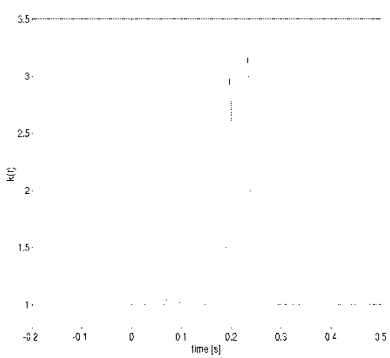
Časo-frekvenční rozdělení (spektrogram)

normování



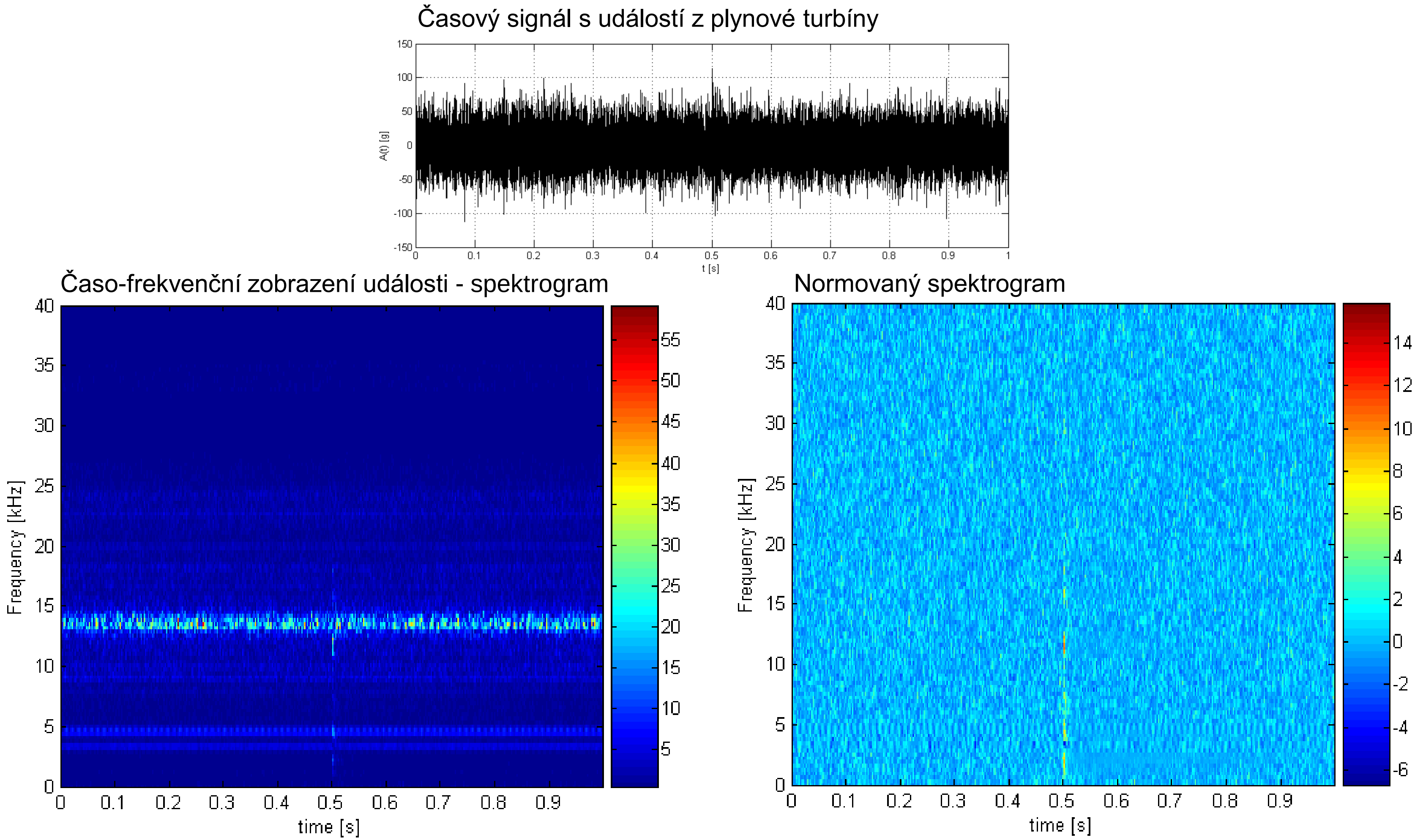
Normované časo-frekvenční rozdělení

Výpočet charakteristické hodnoty



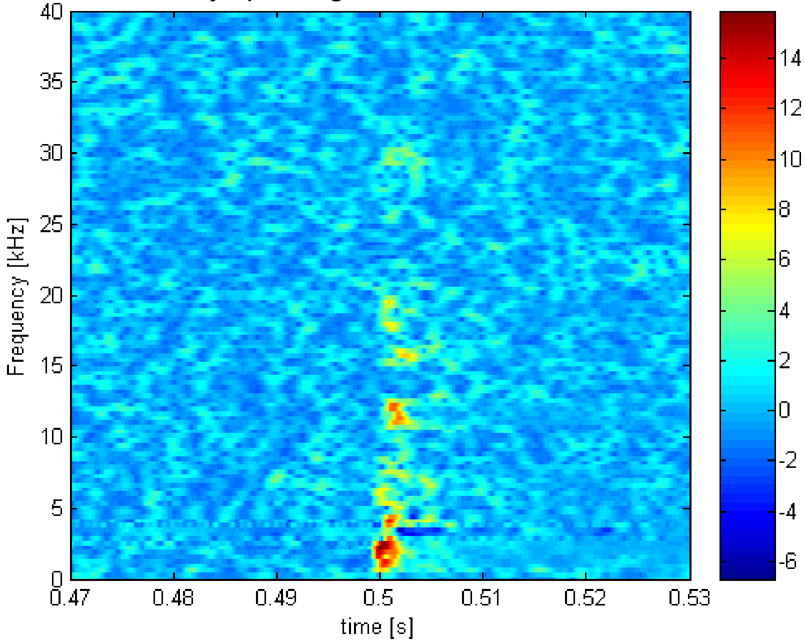
Charakteristická hodnota k(t)

Aplikace – detekce pádu keramického obkladu ve spalovací komoře plynové turbíny

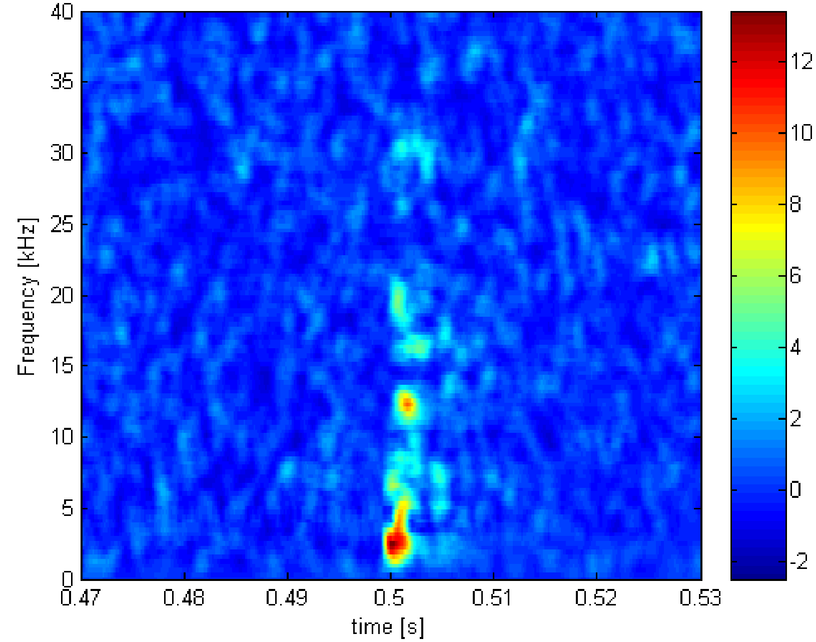


Aplikace – detekce pádu keramického obkladu ve spalovací komoře plynové turbíny

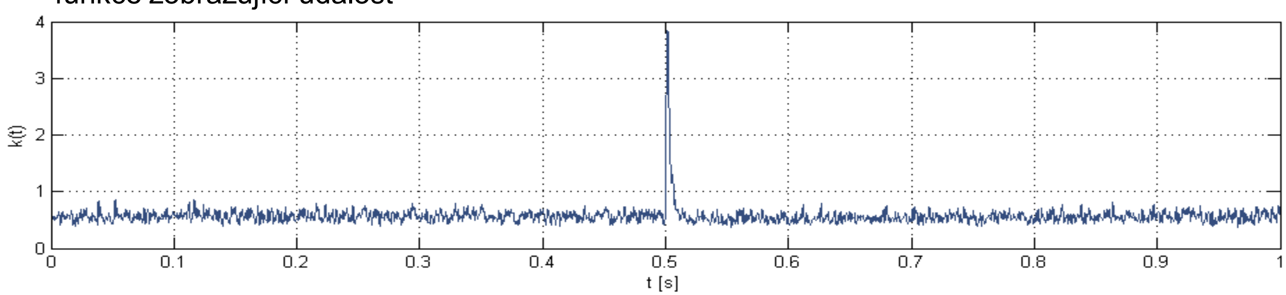
Normovaný spektrogram



Filtrovaný normovaný spektrogram



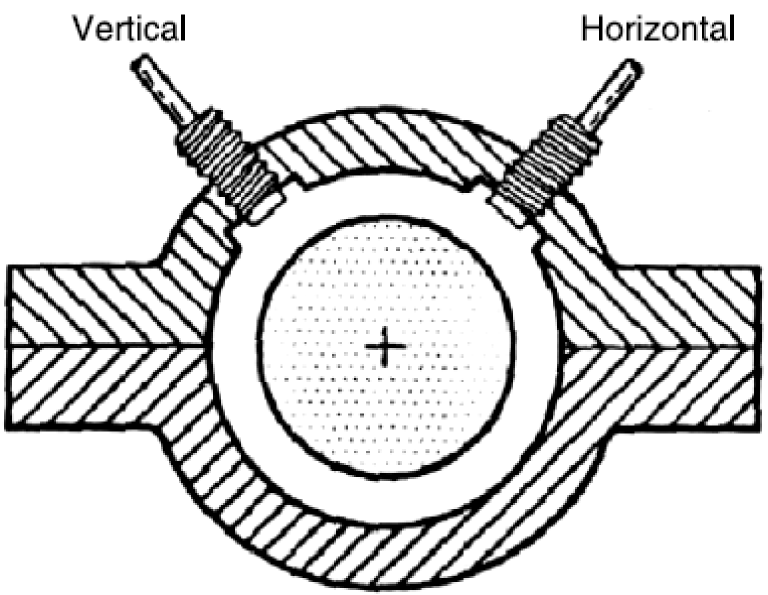
funkce zobrazující událost



ÚPLNÉ SPEKTRUM – DIAGNOSTIKA ROTAČNÍCH STROJŮ

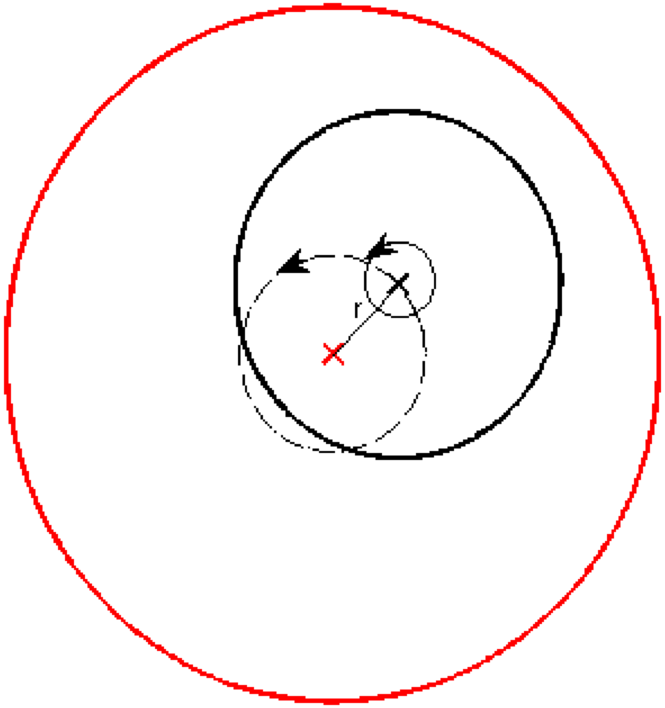
Úplná spektra

- Metoda úplného spektra se využívá pro diagnostiku rotačních zařízení. Od klasického spektra se úplné spektrum liší zejména tím, že kombinuje informace ze dvou kolmých signálů. Kromě údaje o amplitudě je významně využita i informace o fázi signálu.



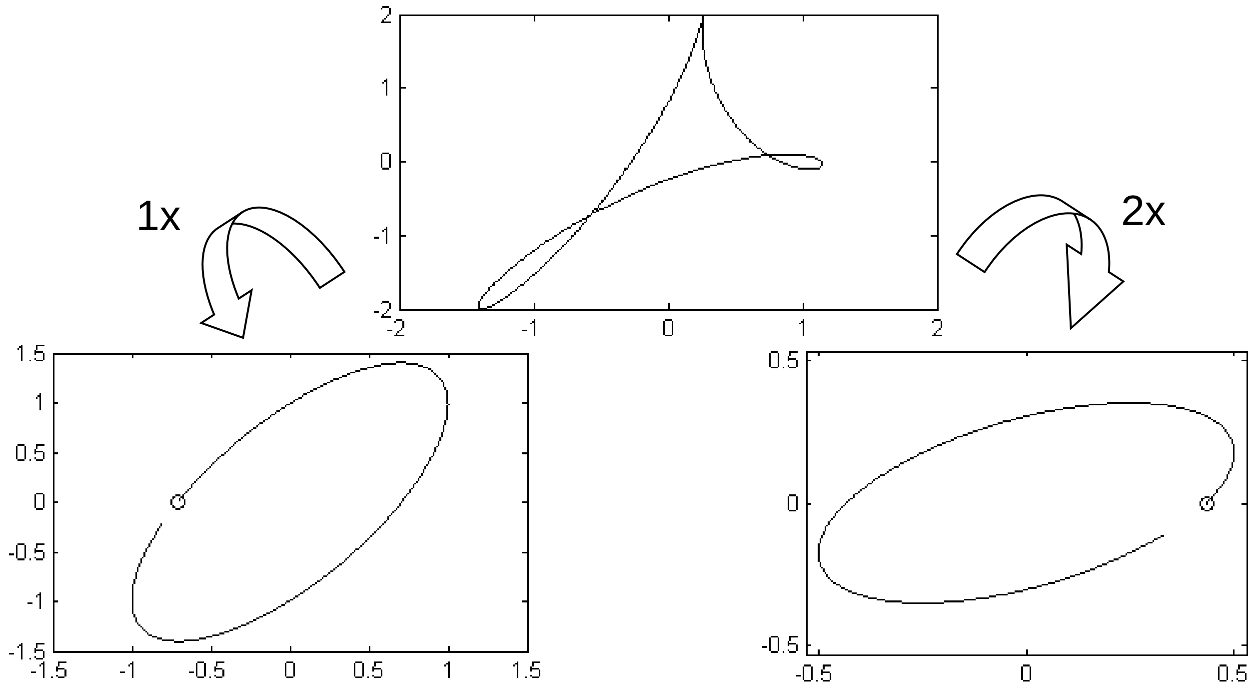
Precese rotoru

- Vlivem nevývažku, rotuje rotor okolo své osy rotace a zároveň rotuje okolo svého geometrického středu.



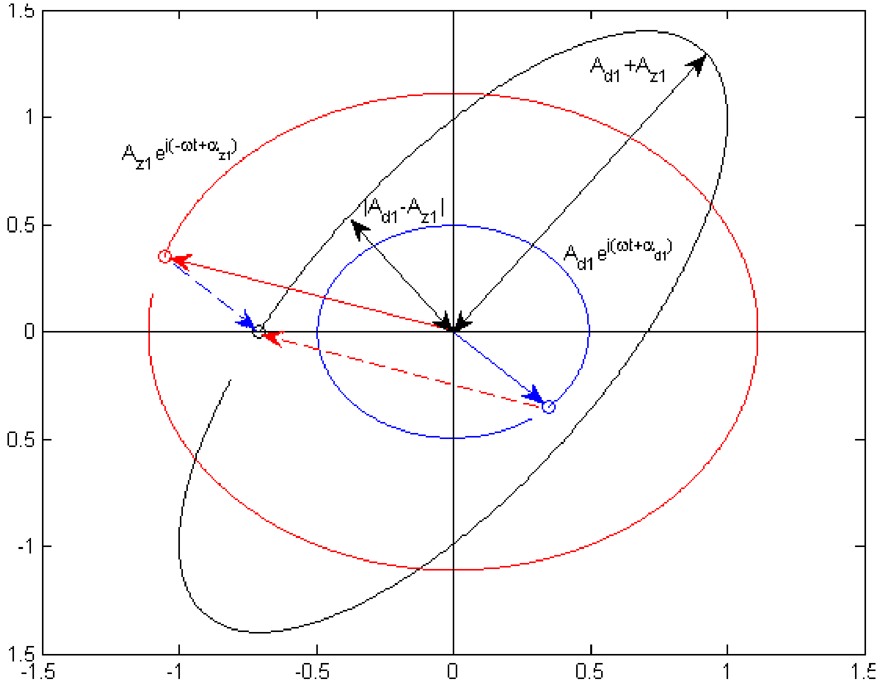
Rozklad složeného orbitu

- Při diagnostice hraje významnou roli údaj o smyslu rotace rotoru okolo jeho geometrického středu(za dopředonou rotaci se považuje rotace proti směru hodinových ručiček). Pokud jsou směry rotace rotoru okolo osy rotace a geometrického středu rozdílné je to z pohledu diagnostiky důležitá informace.

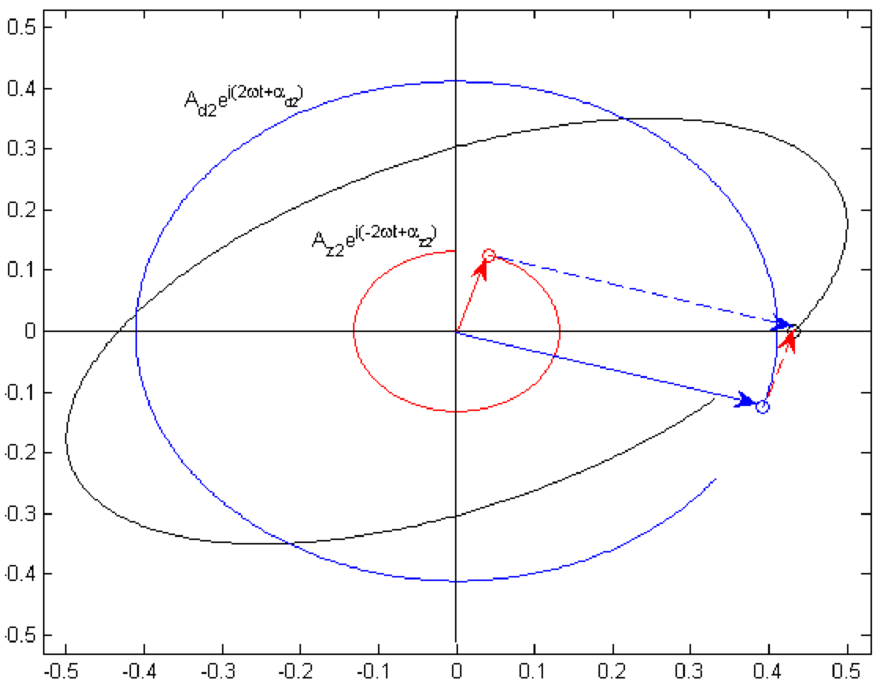


Rozklad elipsy na protiběžné kružnice

1x



2x



Rozklad elipsy na protiběžné kružnice

- Otázkou je, jak vypočítat amplitudy a fáze dopředných a zpětných složek orbitu. Amplitudy ani fáze na daných frekvenčních složkách obecně dopředu neznáme a musíme je odhadovat některou z estimačních metod. Pokud vyjdeme z předpokladu, že filtrovaný signál lze pomocí odhadovaných amplitud a fází na frekvenci ω zapsat ve tvaru A*sin(ωt+α), pak pokud odhadujeme amplitudy a fáze pro dva ortogonální signály, lze amplitudy a fáze jejich dopředných i zpětných složek následně odvodit:

Zprvu předpokládejme, že měřené signály jsou monokomponentní a jejich frekvence je rovna ω. Pak můžeme vyjít z rovnice

[illegible]

Odvození

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Odvození

$$A_d = \frac{1}{2}\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + 2A_x A_y \sin(\alpha_x - \alpha_y)}$$

$$\alpha_d = \tan^{-1}\left(\frac{A_y \sin\alpha_y - A_x \cos\alpha_x}{A_y \cos\alpha_y + A_x \sin\alpha_x}\right)$$

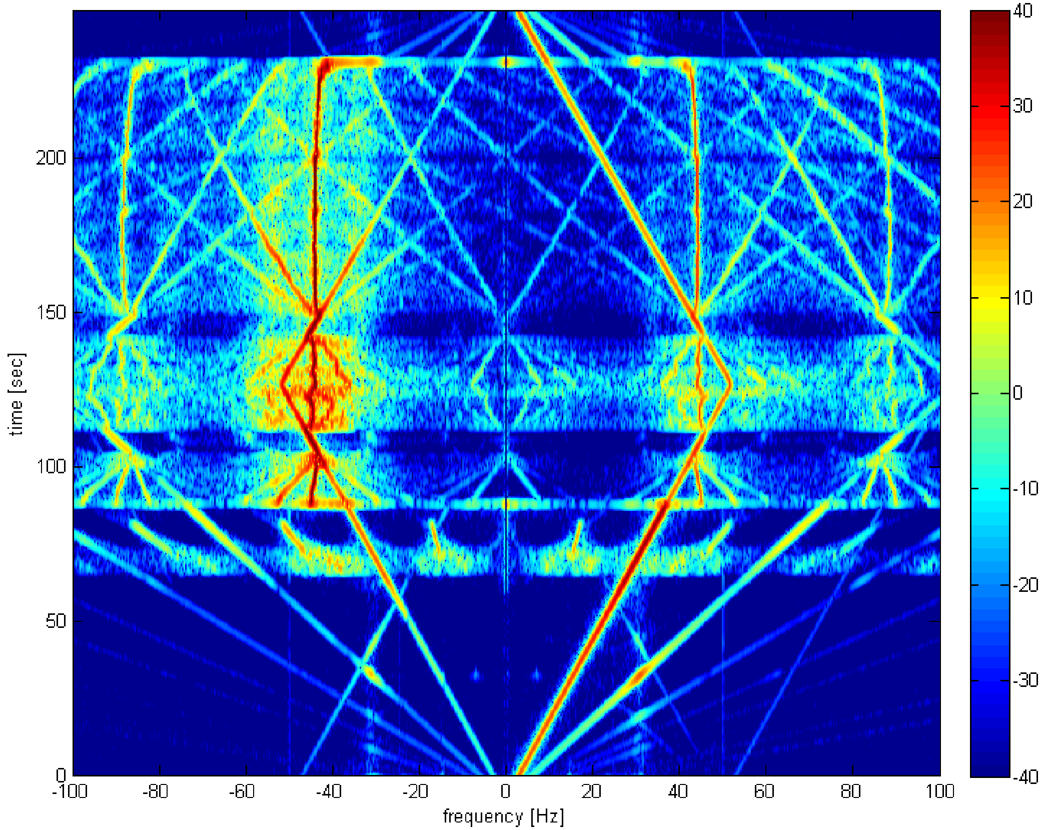
$$A_z = \frac{1}{2}\sqrt{A_x^2 + A_y^2 - 2A_x A_y \sin(\alpha_x - \alpha_y)}$$

$$\alpha_z = \tan^{-1}\left(\frac{A_y \sin\alpha_y + A_x \cos\alpha_x}{A_x \sin\alpha_x - A_y \cos\alpha_y}\right)$$

- Stejné výsledky lze získat za předpokladu, že signál je ve tvaru A*cos(ωt+α), což je například situace při použití amplitud a fází z Fourierovy transformace.

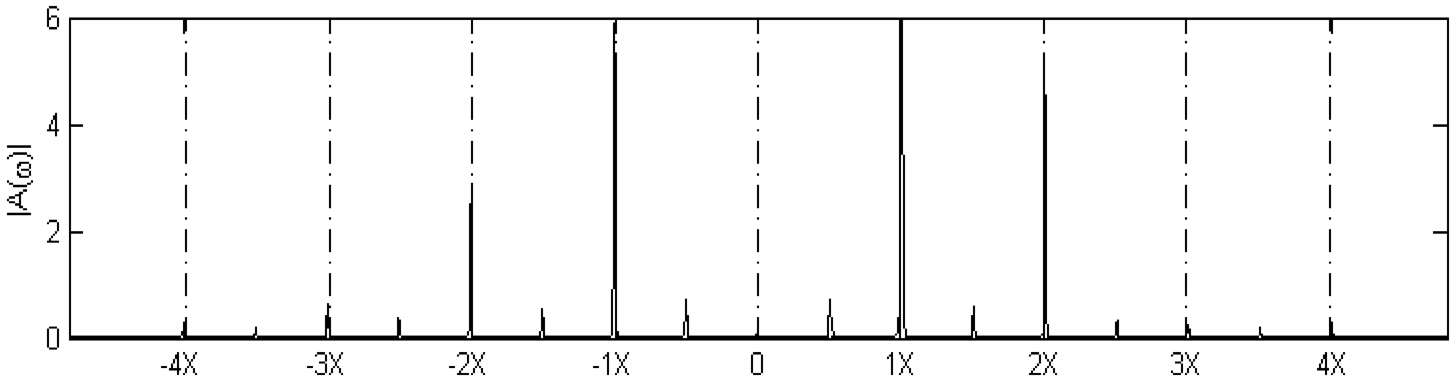
Příklad úplného spektra

- Tímto způsobem lze amplitudová i fázová spektra z Fourierovy transformace přepočítat do úplného spektra:

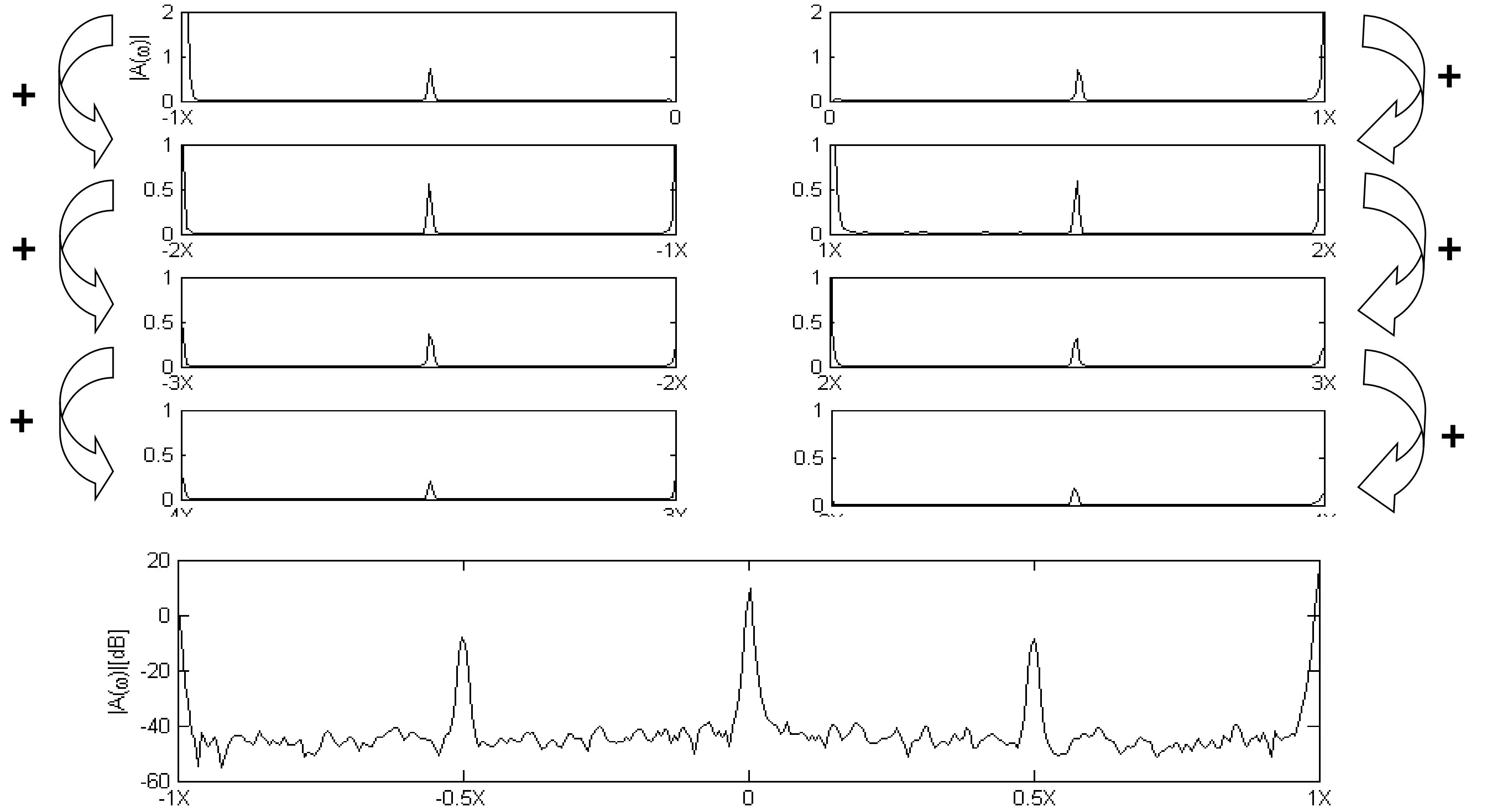


Akumulovaná úplná spektra

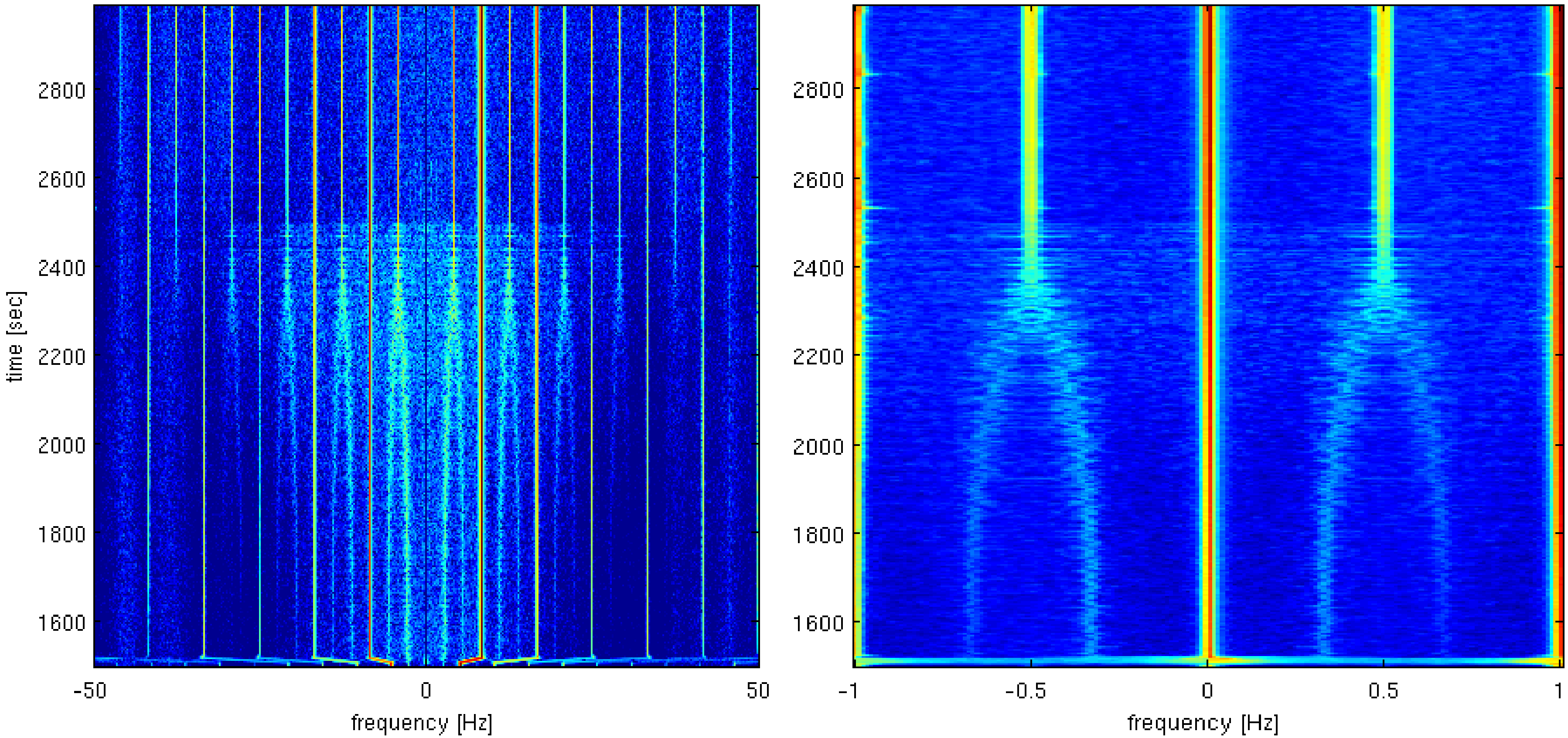
- Pro analýzu úplných spekter, zejména pro potřeby detekce rubbingu, byla vyvinuta metoda přepočtu úplných spekter na akumulovaná úplná spektra. Jedná se o transformaci spektra definovaného ve frekvenční oblasti [f1 - f2] do oblasti [0 – 1X]. Tím se veškerá informace obsažená ve spektru v širokém



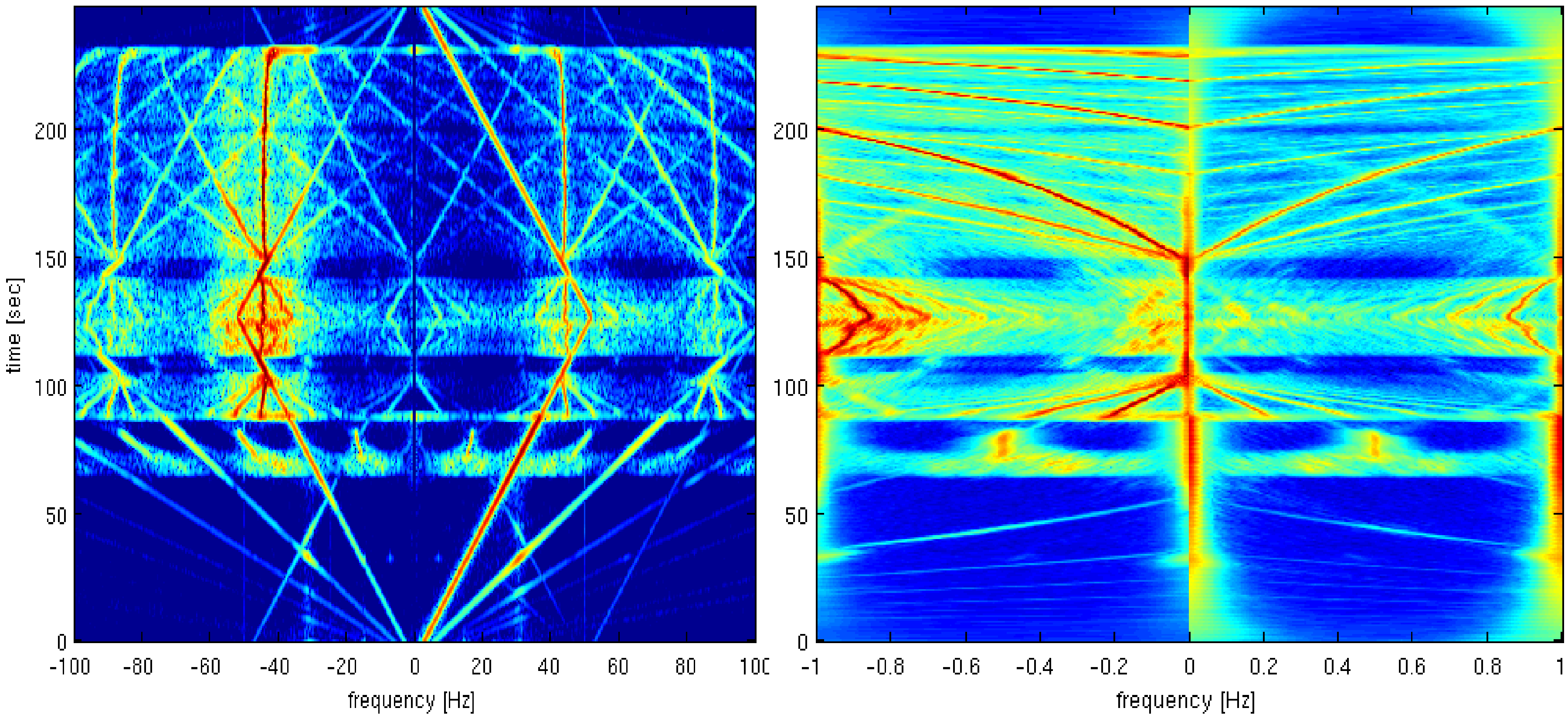
Princip výpočtu akumulovaných úplných spekter



Porovnání metod - rubbing

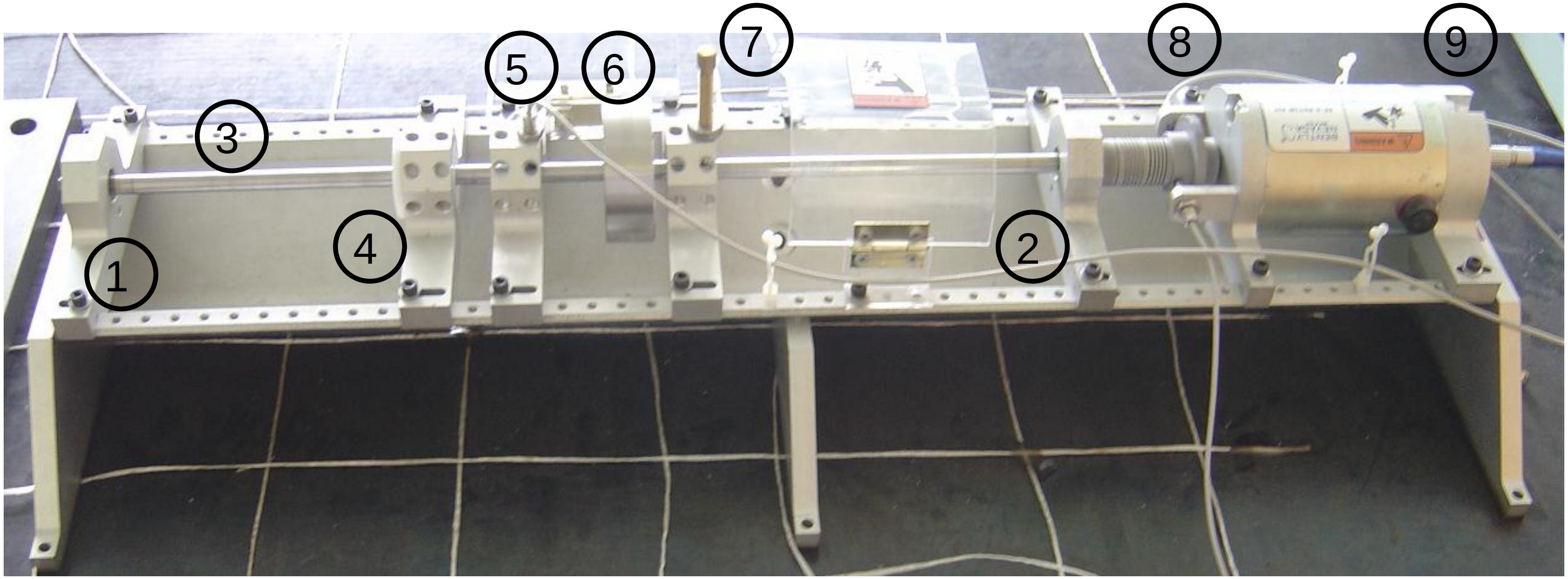


Porovnání metod - rubbing



ROTOROVÝ STEND - EXPERIMENTY

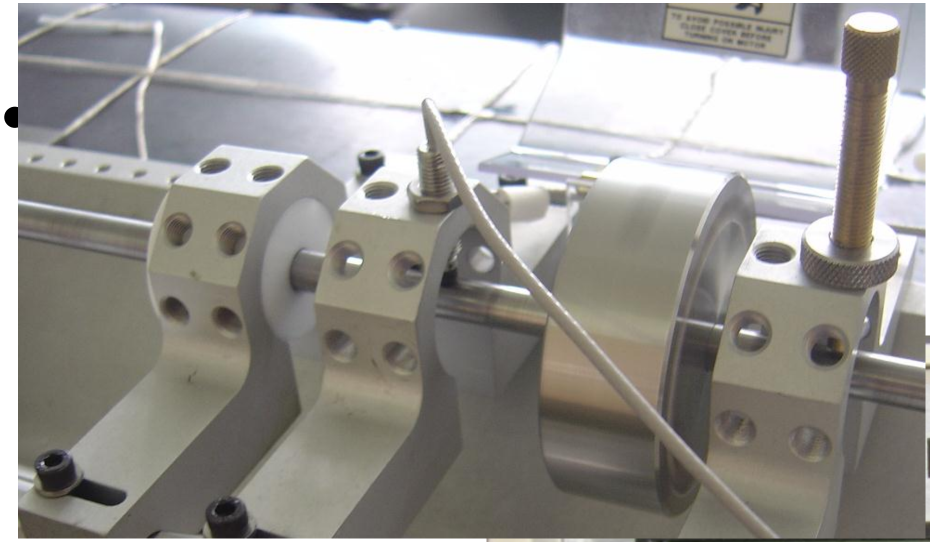
Rotorový stend RK4



- 1 – 2: mosazná kluzná ložiska
- 3: hřídel, L = 0.56m, d = 0.01m
- 4: silikonová ucpávka, d = 0.0105m
- 5: snímače relativních vibrací
- 6: disk simulující hmotu rotoru
- 7: mosazný šroub pro vnější vyvolání rubbingu
- 8: snímače otáček
- 9: hnací motor zařízení, P = 0.75W
- Řídící jednotka otáček umožňuje plynulé změny otáček až do 10000 ot/min.

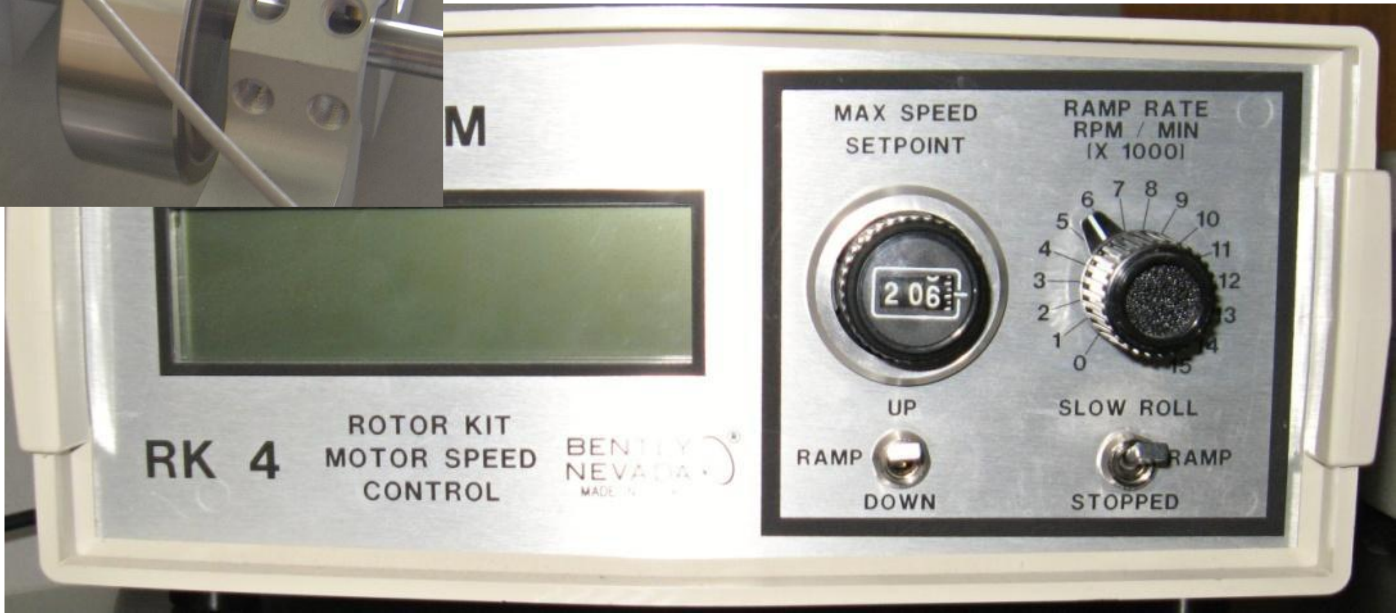
Součásti RK4

•



Silikonová ucpávka

Řídící jednotka otáček



Měření

multifunkční měřící karta pro PCMCIA

- až 16 analogových vstupů
- vzorkování mulliplex 200kS/s
- A/D převodník, 12 bitů

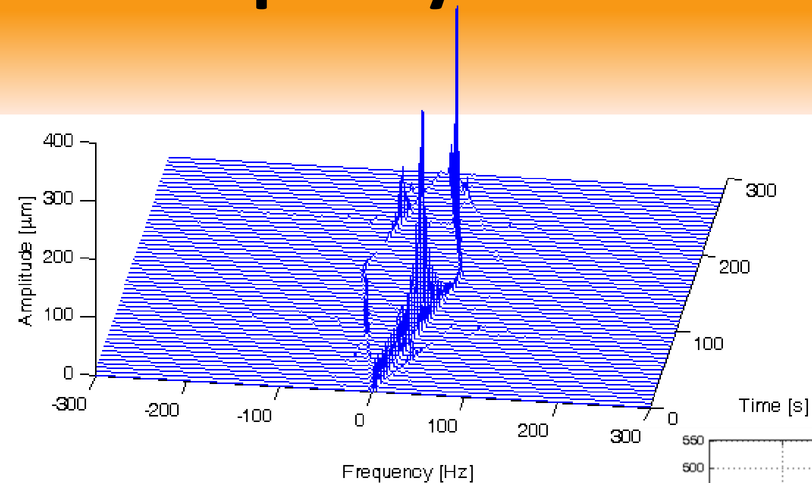
- svorkovnice pro přenos dat
- přenos signálů s velmi nízkým šumem

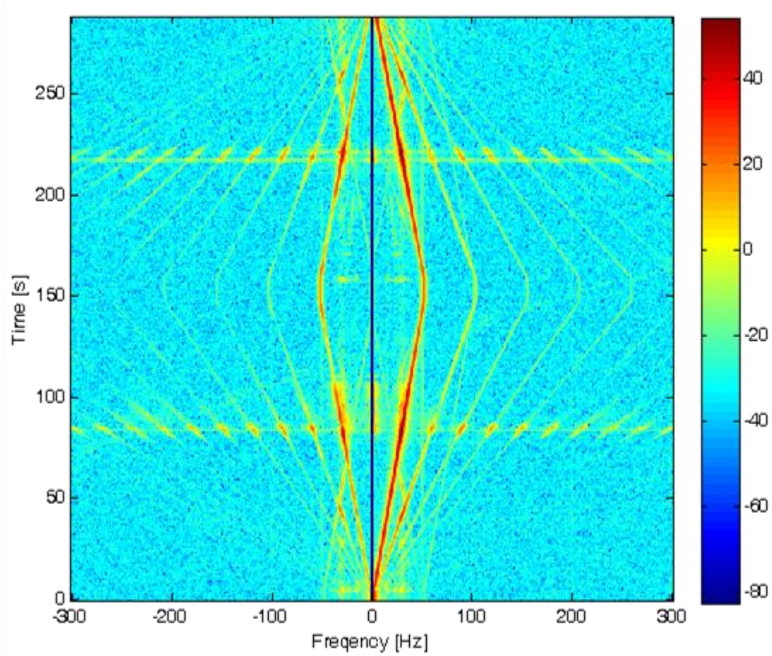
Cíle experimentu

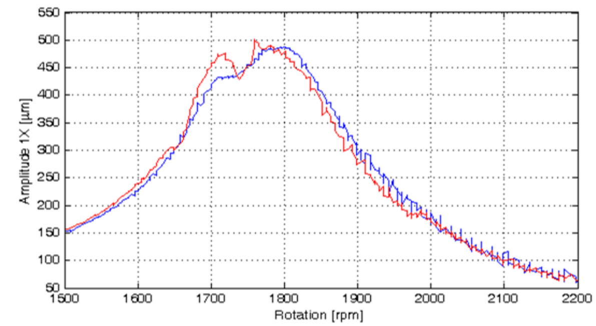
- Mezi hlavní cíle celého experimentu patřilo vyvolání částečného a úplného rubbingu bez vnějšího zásahu – tj. bez použití mosazného šroubu, atd… Během experimentů byla ucpávka umísťována do různých pozic vzhledem ke kovovému disku s nevývažkem. Několikrát se podařilo experimentálně vybudit částečný rubbing a dokonce také rubbing úplný se zpětnou precesí.

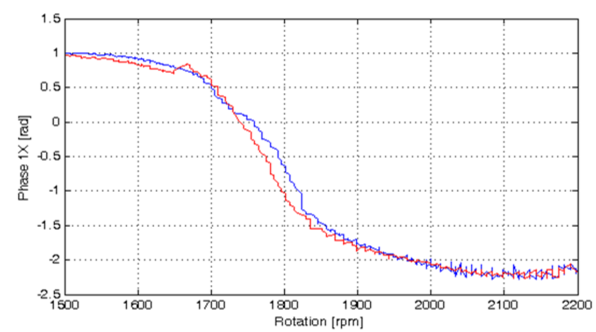
- Vznik rubbingu bez vnějších příčin lépe odpovídá vzniku rubbingu na reálných strojích. Získané poznatky byly výchozí pro analýzu dat z Amageru.

Provoz bez ucpávky

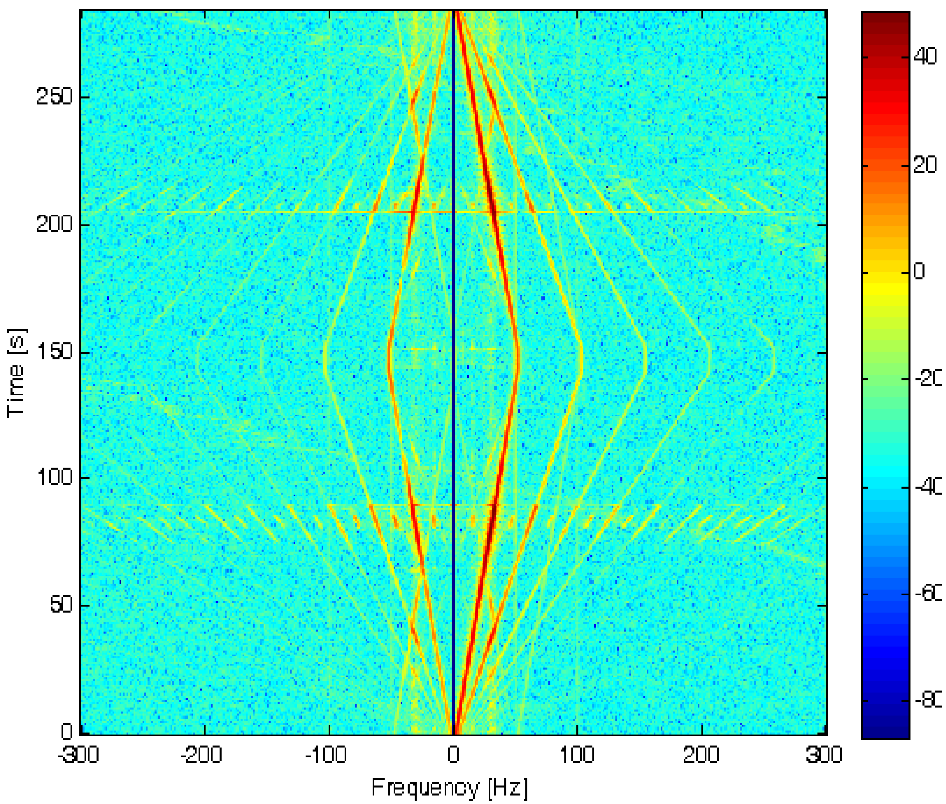


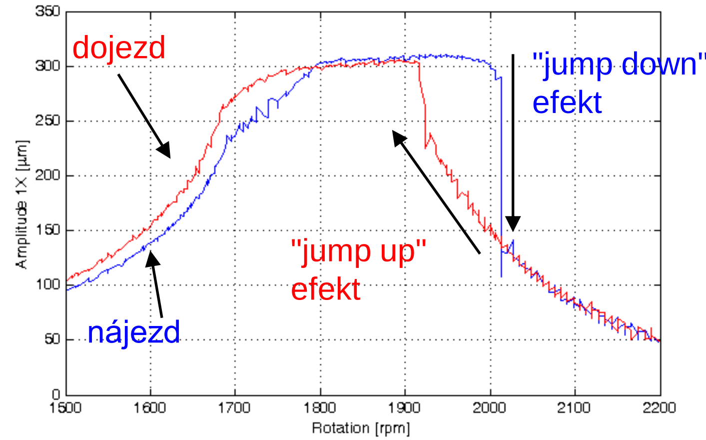


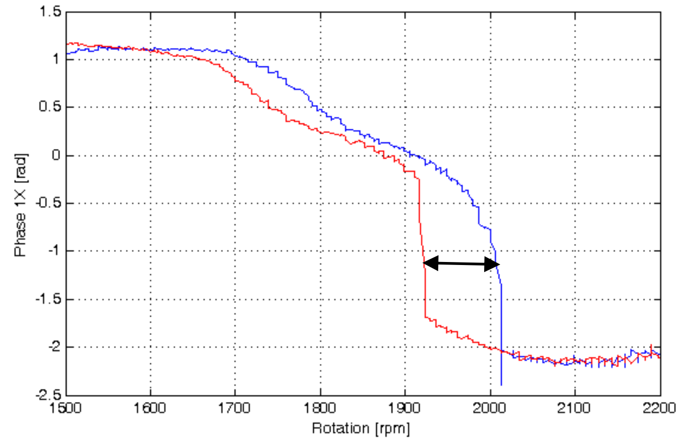




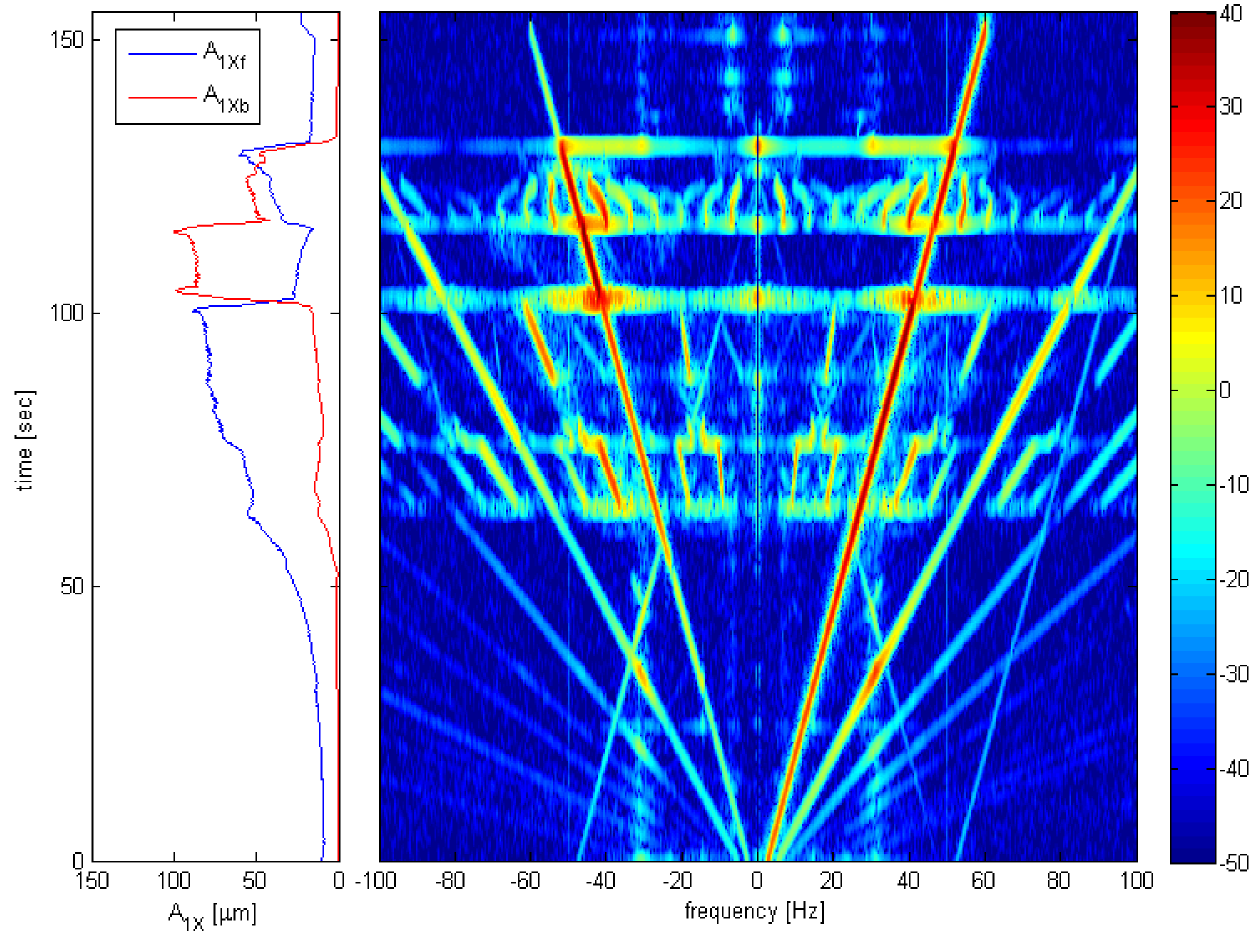
Provoz s ucpávkou – Rubbing s dopřednou precesí



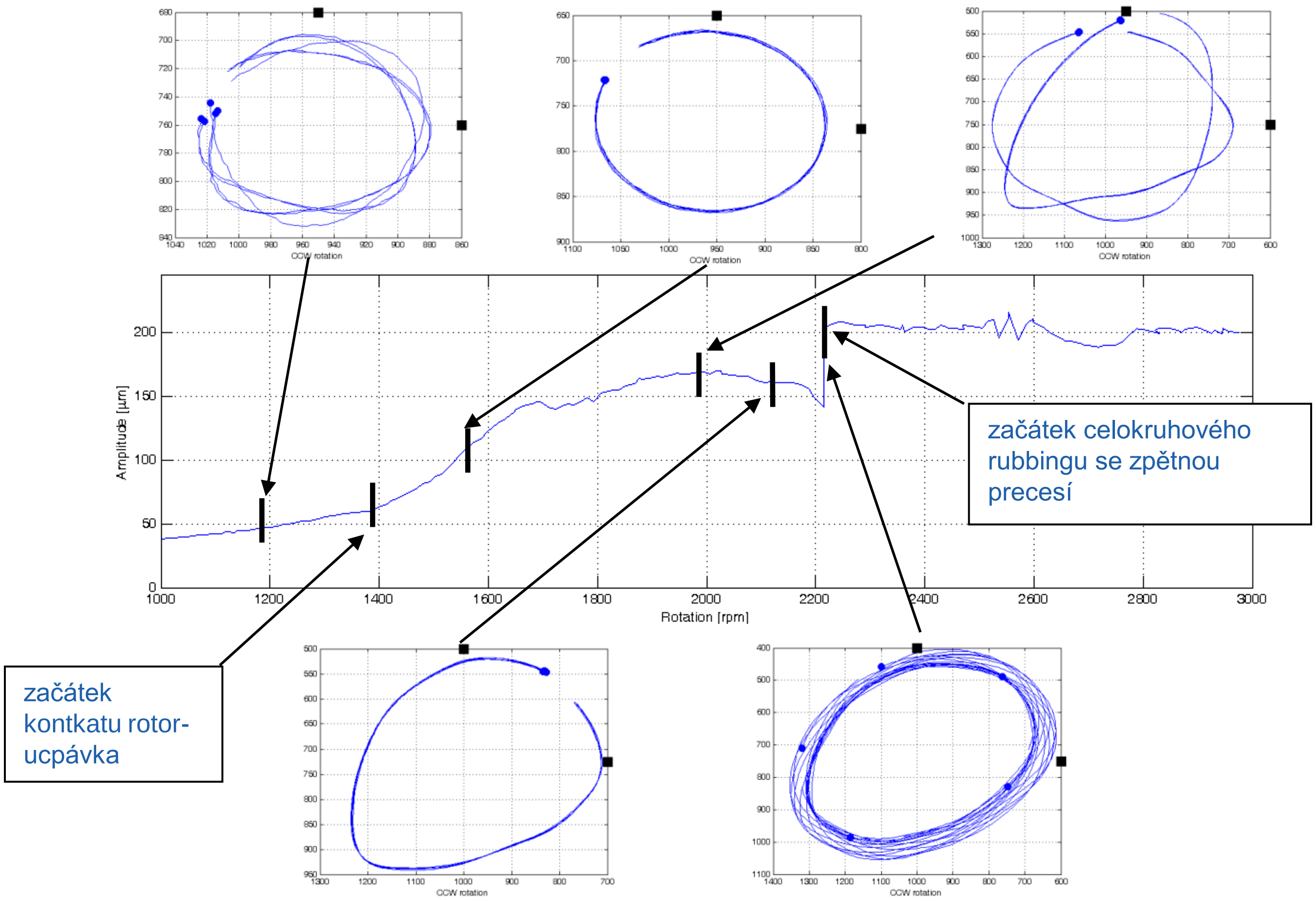




Provoz s ucpávkou – přechod dopředné precese ve zpětnou u částečného rubbingu



Provoz s ucpávkou – celokruhový rubbing se zpětnou precesí



Provoz s ucpávkou – celokruhový rubbing se zpětnou precesí