INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Další studium

A. Isidori. *Nonlinear Systems: Third Edition,* Springer Verlag, Heidelberg, 1995.

A. Vaněček a S. Čelikovský. *Control Systems: From Linear Analysis to Synthesi of Chaos,* Prentice Hall, 1996.

A. Isidori. *Nonlinear Systems II,* Springer Verlag, London 2007.

H. Khalil. *Nonlinear Systems: Third Edition,* Prentice Hall, Upper Saddle River 2002.

S. Čelikovský. *Nelineární systémy*, ČVUT 2006.

EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Matematické základy teorie a aplikací nelineárních dynamických systémů

1 / Úvod a zajímavé nelineární jevy

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Nelineární stavový model – spojitý čas

Stavová rovnice

$$\boxed{\dot{x} = f(x,u,t)}$$

stav

vstup

čas

n-dimensionální vektorová nelineární diferenciální rovnice prvního řádu

výstup

Výstupní rovnice

$$\boxed{y = h(x,u,t)}$$

Všechno jsou vektory

$$f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix},\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix},\ y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

Nelineární dynamický systém - spojitý čas

- modely s vyššími derivacemi můžeme na první derivace přepočítat
- většinou se budeme zabývat jen stavovou rovnicí

Zvláštní případy:

- rovnice bez vstupu (unforced)

$$\boxed{\dot{x} = f(x,t)}$$

dostaneme když $u \equiv 0;\ u = \gamma(t);\ u = \gamma(x);\ u = \gamma(x,t);$

- autonomní, neproměnná v čase (time invariant)

$$\boxed{\dot{x} = f(x)}$$

chování nezávisí na posunu v čase $\tau = t - a$

Úskalí nelineárních systémů

Na rozdíl od lineárních systémů

- málokdy najdeme řešení v uzavřeném tvaru
- proto obvykle nutná kvalitativní analýza a současně kvantitativní verifikace opakovanými simulacemi
- matematické nástroje jsou pokročilejší a složitější

Lineární model

Speciální tvar rovnic - lineární

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u$$
$$y = C(t)x + D(t)u$$

Lineární systémy

- princip superposice a další „zřejmá pravidla“
- k disposici jsou účinné metody analýzy a návrhu
- obvykle první krok při analýze nelineárního systému je přibližná linearizace v nominálním pracovním bodě + lineární analýza

Meze využití přibližné linearizace

Linearizace sama často nestačí protože

- Popisuje pouze lokální chování v okolí jednoho pracovního bodu a nikoli nelokální nebo dokonce globální chování
- Dynamika nelineárních systémů je mnohem bohatší, protože existuje mnoho podstatně nelineárních jevů, které nemohou u lineárních systémů nastat a proto
- nemohou být linearizovaným modelem předpovězeny, popsány ani vysvětleny.

Nelineární jevy

Více řešení a únik v konečném čase
Rovnovážné stavy
Oscilace
Bifurkace
Chaos

Tato prezentace je spolufinancována Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

Ryze nelineární jevy

Jevy, které nemohou nastat u lineárních systémů:

- Více řešení a jejich únik v konečném čase
  NL systém může jít do nekonečna v konečném čase
- Mnohonásobná izolovaná ekvilibria
  NL systém může mít víc izolovaných rovnovážných stavů
- Limitní cykly
  NL systém může mít stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávislé na počátečním stavu
- Bifurkace
  Kvalitativní rysy NL systémů se mohou měnit se změnou parametrů
- Složité dynamické chování
  chaos, turbulence, malá změna počátečních podmínek může výrazně změnit výsledné chování: „efekt motýlího křídla“

Řešení není jednoznačné

Rovnice

$$\boxed{\dot{x} = 3x^{2/3}} \qquad x(0) = 0$$

je řešitelná každou funkcí

$$\boxed{x_a = \begin{cases} (t-a)^3 & \dots \ t \geq a \\ 0 & \dots \ t < a \end{cases}}$$

kde *a* je libovolné nezáporné reálné číslo.

Řešení jen existuje pro některá *t*

Rovnice $\boxed{\dot{x} = 1 + x^2}$ $x(0) = 0$

má řešení $\boxed{x(t) = \tan(t)}$

ale jen na intervalu $[0, \frac{\pi}{2})$.

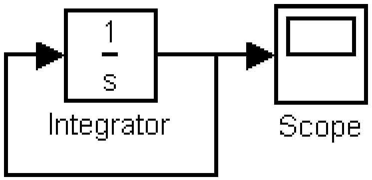
Vně tohoto intervalu řešení neexistuje.

(tzv. únik v konečném čase)

Únik v konečném čase

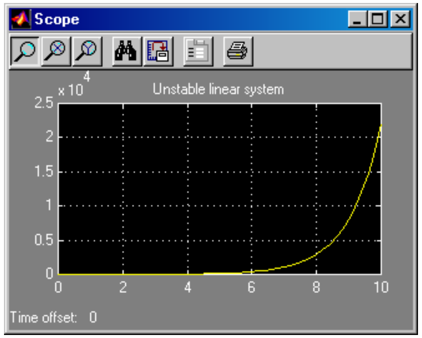
Lineární systém

- výstup jde do nekonečna nejvýše asymptoticky

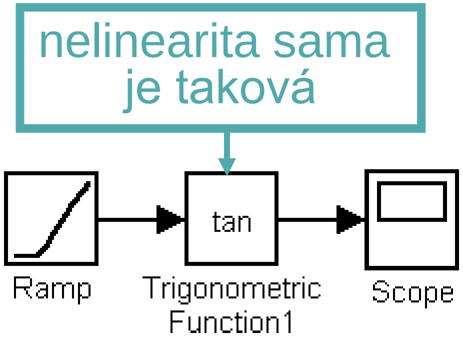


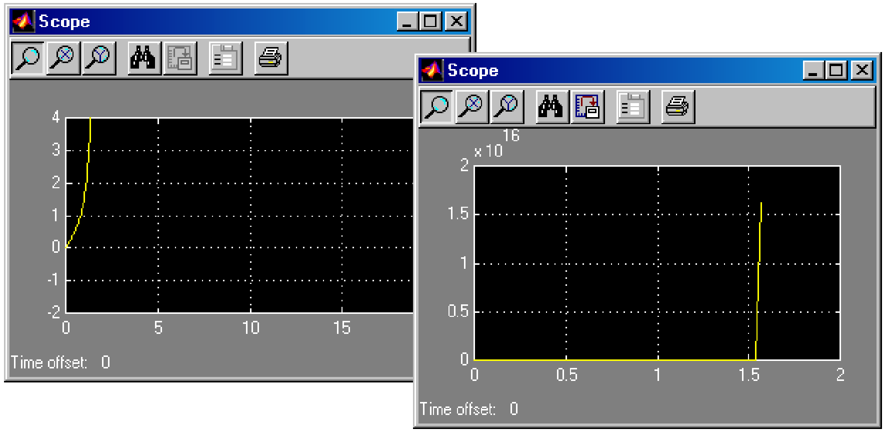
$$\dot{x} = x$$

$$\boxed{x(t) = e^{t} x_0}$$



- výstup může jít do nekonečna i v konečném čase

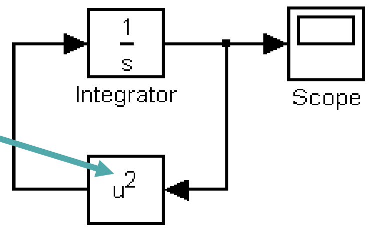




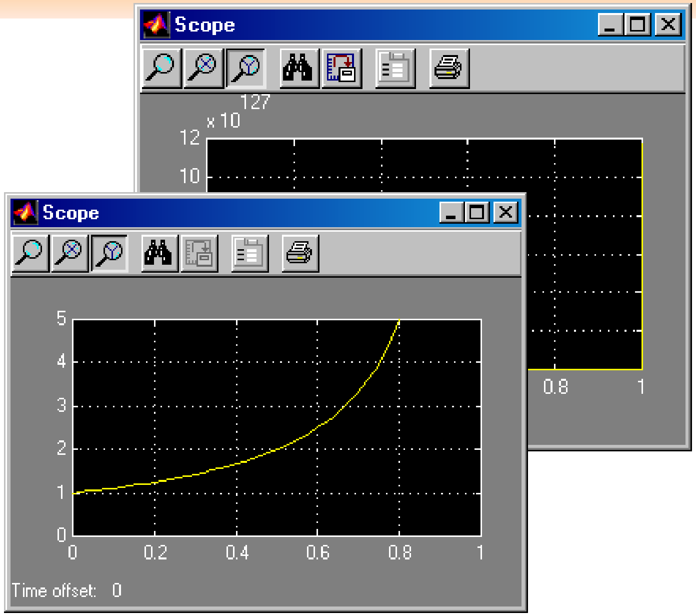
Únik v konečném čase

nevinná nelinearita

$$\dot{x} = x^2$$



$$t_0 = 0, x_0 = 1 \longrightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{1-t}}$$



$$t_0, x(t_0) = x_0 \neq 0$$

separace proměnných

$$\frac{dx}{dt} = x^2 \longrightarrow \frac{dx}{x^2} = dt \xrightarrow{\int_{t_0}^{t}} x(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x_0} + t_0\right) - t}$$

Rovnovážný stav

Rovnovážný stav = ekvilbrium = pevný bod = kritický b.

Definice:

$x_0 \in R^n$ je ekvilibrium systému $\dot{x} = f(x,t)$ v čase t_0

$$\Longleftrightarrow \quad f(x_0,t) = 0 \quad \forall t \geq t_0$$

Význam

Pokud má systém jediné řešení a x_0 je jeho ekvilibrium

v čase t_0 a $x(t_0) = x_0$, pak $x(t) \equiv x_0 \quad \forall t \geq t_0$,

tj. zůstává v rovnovážném stavu.

Počet rovnovážných stavů

Jak najít ekvilibrium?

Pokud je systém autonomní, jeho ekvilibria najdeme řešením (vektorové) nelineární algebraické rovnice

$$\boxed{f(x)=0}$$

Tato rovnice může mít

- žádné řešení
- jedno řešení nebo více izolovaných řešení
- kontinuum řešení

Například digitální obvody pro binární logiku – mají aspoň dva stabilní rovnovážné stavy

Lineární systém $\boxed{Ax=0}$ má buď jediné řešení $x=0$ (*A* nesingulární) nebo kontinuum řešení (*A* singulární).

Systémy prvního řádu

Nelineární systém $\boxed{\dot{x} = (1 - x^2)x}$

- 3 ekvilibria: $0 = (1 - x_e^{\,2})x_e \rightarrow$ $\boxed{x_e = 0, \pm 1}$
- řešení

$$\boxed{x(t) = \frac{\mathrm{sign}(x_0)}{\sqrt{1 - \frac{e^{-2t}(x_0^{\,2} - 1)}{x_0^{\,2}}}}}$$

$$\mathrm{sign}(x_0) = \begin{cases} 1 & \cdots \quad x_0 > 0 \\ 0 & \cdots \quad x_0 = 0 \\ -1 & \cdots \quad x_0 < 0 \end{cases}$$

- zřejmě

$$\lim_{t \to \infty} \sqrt{.} = 1$$

Oscilace – limitní (mezní) cyklus

Lineární systém

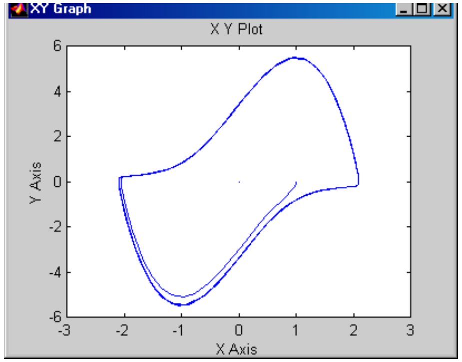
- může oscilovat (když má póly na imaginární ose), ale
- oscilace jsou nestabilní (póly na mezi stability) a
- jejich amplituda závisí na počátečních podmínkách

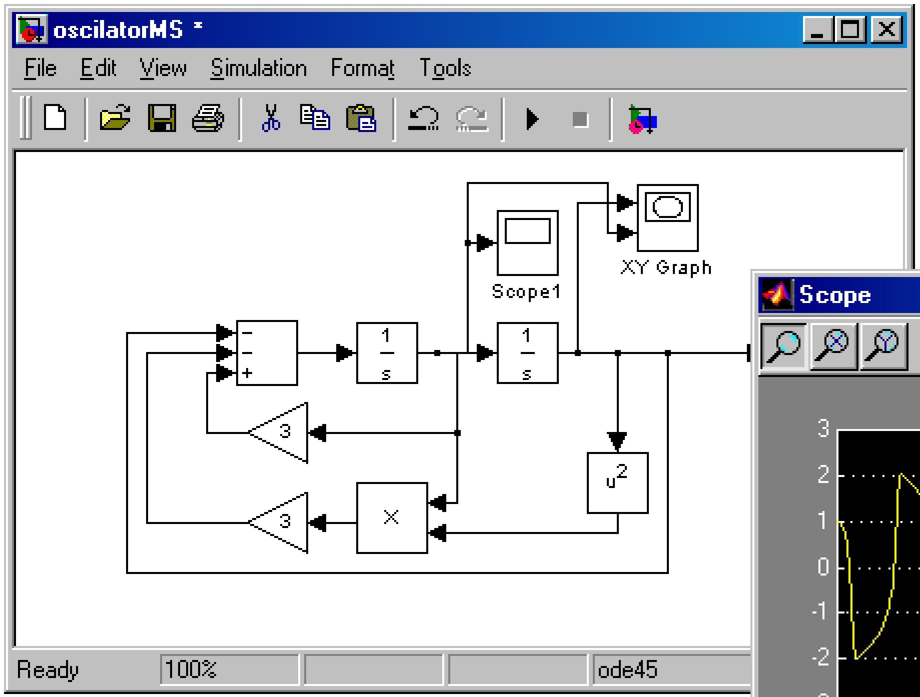
Nelineární systém

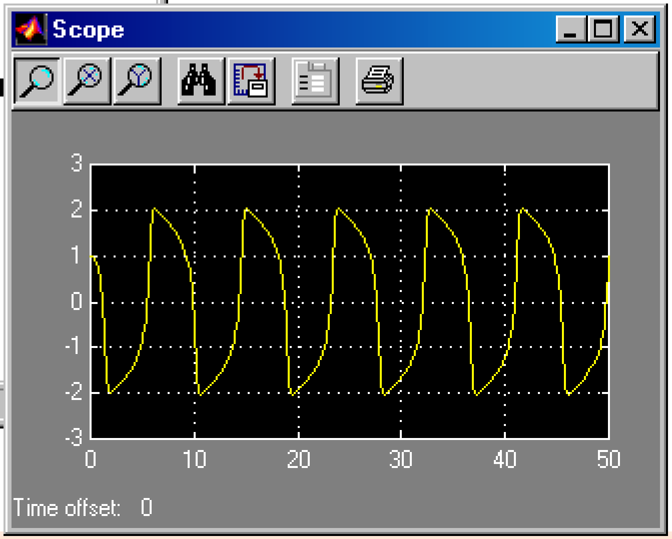
- mezní cyklus (limit cycles), což jsou stabilní oscilace s pevnou amplitudou a frekvencí nezávisle na poč. stavu.
- Např.
  - van der Polovy rovnice (modelují tlukot srdce, nervové pulsy, stahy svalů v jícnu a střevech) mají jeden stabilní limitní cyklus
  - obvody digitálních hodin a astabilních multivibrátorů produkují cyklické změny mezi 0 a 1 (degenerované van der Polovy rovnice)

Nelineární oscilace

- $$\ddot{x} + x + 3(x^2 - 1)\dot{x} = 0$$



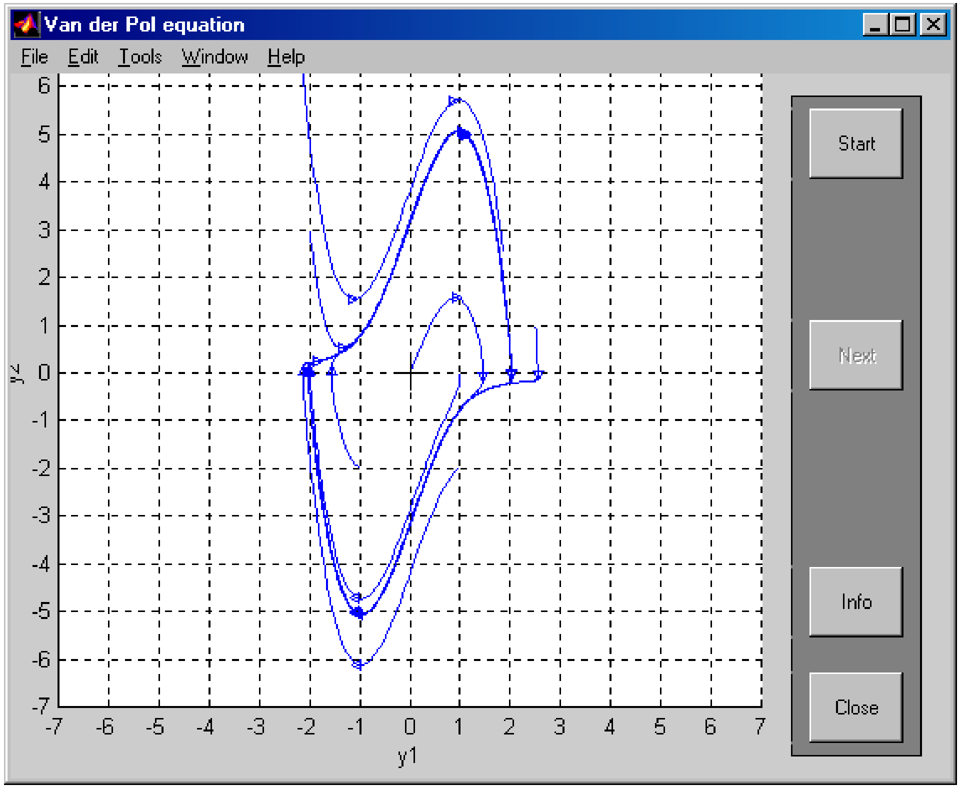




i když měníme zesílení a pp

Nelineární oscilace

- $\ddot{x} + x + 3(x^2 - 1)\dot{x} = 0$ demophOscilator2



Bifurkace

Systém s rovnicí $\boxed{\dot{x} = (a - x^2)x}$ má

- 3 eq. pro $a > 0$ $\quad 0 = (a - x_e{}^2)x_e \rightarrow$ $\boxed{x_e = 0, \pm\sqrt{a}}$
  viz dřívější příklad

$$\boxed{b = 1 + \frac{e^{-2at}(a - x_0{}^2)}{x_0{}^2}} \qquad \lim_{t\to\infty} b = \begin{cases} 1 \ldots a > 0 \\ -\infty \ldots a < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{x(t) = \frac{\operatorname{sign}(x_0)\sqrt{ab}}{b}}$$

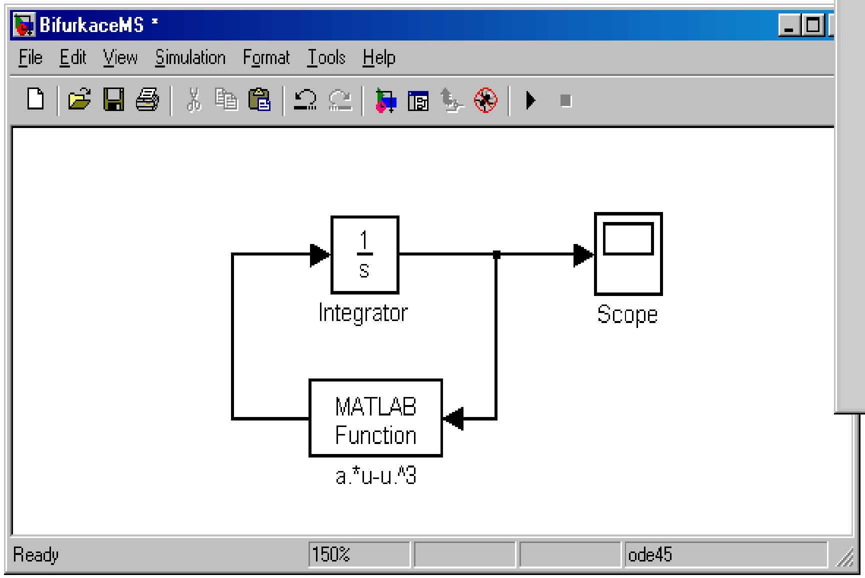
$$\boxed{x(t) = \begin{cases} \operatorname{sign}(x_0) / \sqrt{2t + 1/x_0{}^2} & \ldots x_0 \neq 0 \\ 0 & \ldots x_0 = 0 \end{cases}}$$

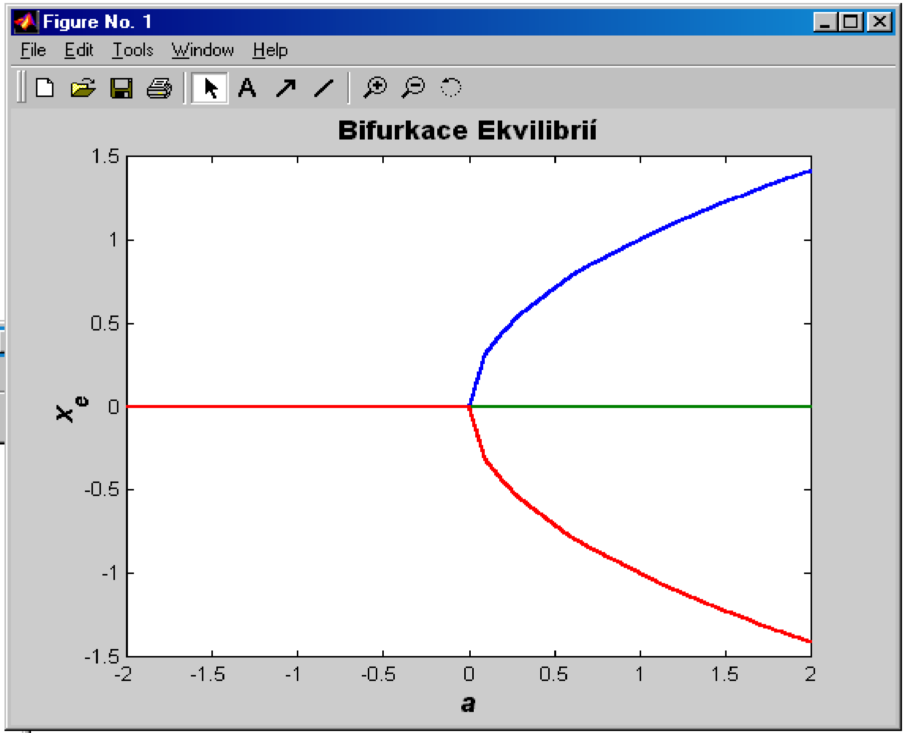
- a jen jedno eq. pro *a=0*

  a pro *a<0*

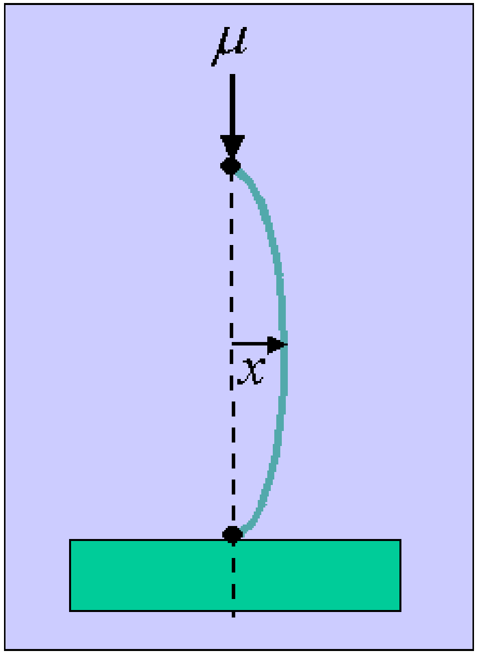
Bifurkace

- *a = +-1*





Ohnutý nosník – rovnice



Pohybová rovnice ve směru *x*

$$m\ddot{x} + d\dot{x} - \mu x + \lambda x + x^3 = 0$$

tlumení

zatížení

pružná síla v nosníku

Pro stavové proměnné

$$x_1 = x, \; x_2 = \dot{x}$$

dostaneme model

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{d}{m}x_2 + \frac{\mu - \lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3$$

Ohnutý nosník - ekvilibria

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{d}{m}x_2 + \frac{\mu-\lambda}{m}x_1 - \frac{1}{m}x_1^3\end{aligned}} \Rightarrow \begin{aligned}0 &= x_2 \\ 0 &= -dx_2 + (\mu-\lambda)x_1 - x_1^3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} &x_2 = 0, x_1 = 0 \\ &x_2 = 0, x_1^2 = \mu - \lambda \end{aligned}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu \le \lambda: \; x_1 = x_2 = 0$$

$$\mu > \lambda: x_1 = 0, \pm 1; x_2 = 0$$

1 ekvilibrium

3 ekvilibria

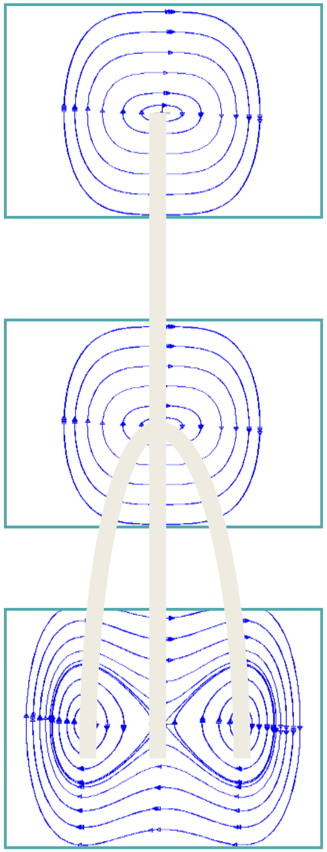
Nosník - Bifurkace

Přechod mezi neohnutým a ohnutými stavy

$\mu < \lambda$

$\mu = \lambda$

$\mu > \lambda$



Bifurkace

Chaos

- složité chování deterministických dynamických systémů, tj. systémů vyvíjejících se v čase, se stavovým popisem
- matematický model: obyčejné diferenciální rovnice, diferenční rovnice, parciální diferenciální rovnice
- 1900 Henri Poincaré, problém 3 těles: může existovat omezený, nezanikající pohyb, který není ani periodický, ani kvaziperiodický, a je proto dlouhodobě nepředvídatelný
- 1963 Edward N. Lorenz: „Deterministic Nonperiodic Flow“, Journal of the Atmosferic Sciences, vol. 20, no. 2, 1963, pp. 130-141.

Chaotický Lorenzův systém – přesná realizace

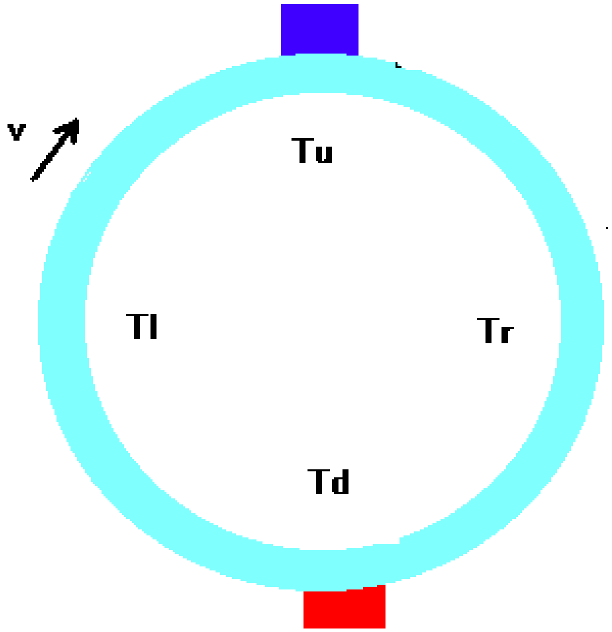
$$\frac{dx_1}{dt} = p(-x_1 + x_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Rx_1 - x_2 - x_1x_3$$

$$\frac{dx_3}{dt} = -x_3 + x_1x_2$$

$$x_1 = v, x_2 = T_l - T_r$$

$$x_3 = R + T_u - T_d$$



Prandtlovo číslo *p*, *R* = *zahřívání mínus chlazení*

Lorenzův systém: analýza stability

$$\dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1)$$
$$\dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3$$
$$\dot{x}_2 = -bx_3 + x_1x_2$$

Počátek:
Globálně asymptoticky stabilní pro *R<1*
Ljapunovova 2há metoda:

$$V = rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma x_3^2$$

$$\frac{dV}{dt} = -2r\sigma(x_1 - x_2)^2 + 2\sigma(r-1)x_2^2 - 2\sigma b x_3^2 < 0 \forall x \neq 0 \Leftrightarrow r < 1$$

Pro *R=1* určitě Ljapunovsky stabilní, ale i GAS díky principu LaSalle
Pro *R>1 lokálně* nestabilní (ověřte 1ní Ljapunovovou metodou)

Ale! Pro každé *R* jsou trajektorie Lorenzova systému jsou omezené

$$V = rx_1^2 + \sigma x_2^2 + \sigma(x_3 - 2r)^2, \quad \frac{dV}{dt} = -2r\sigma x_1^2 - 2\sigma x_2^2 - 2\sigma(x_3 - r)^2$$

Vlastnosti chaosu

- citlivá závislost na počátečních podmínkách
- topopogická tranzitivita
- existence všude husté množiny nestabilních periodických trajektorií

stacionární chování: systém je ustáleném rovnovážném stavu

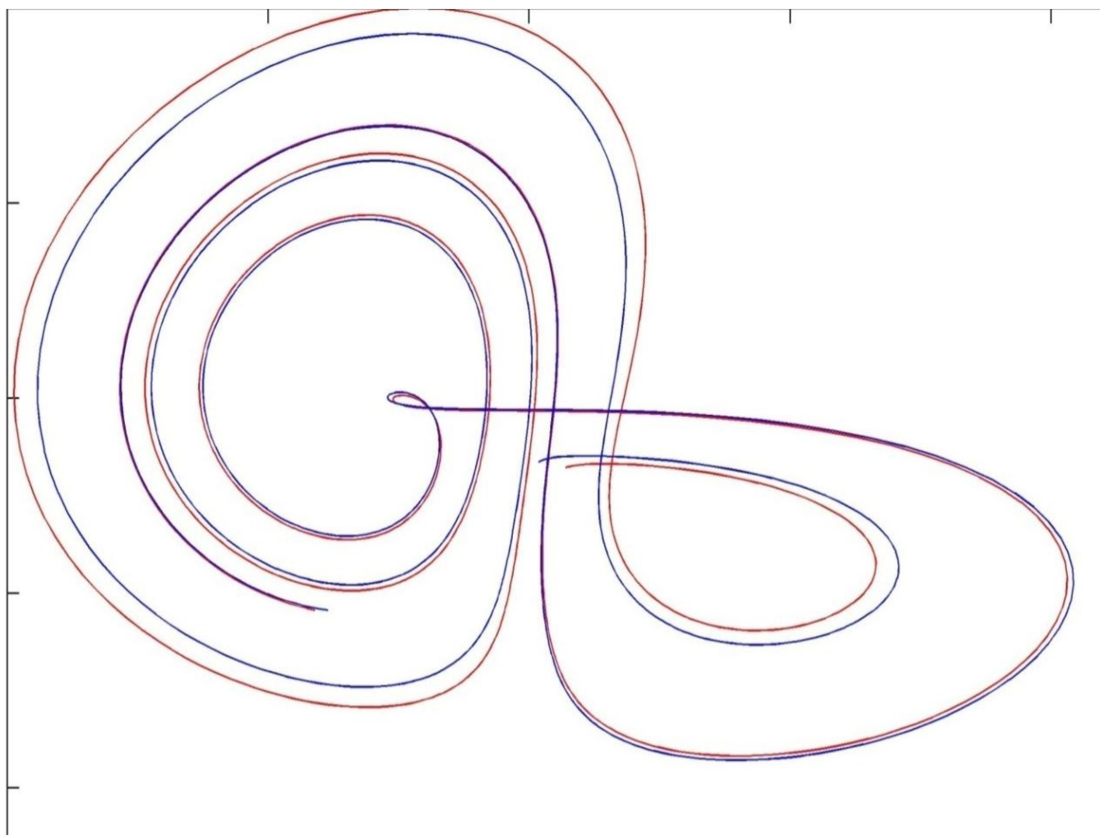
neomezené chování: trajektorie neomezeně roste

periodické chování: po určité, přesně dané periodě, se vše naprosto stejně opakuje

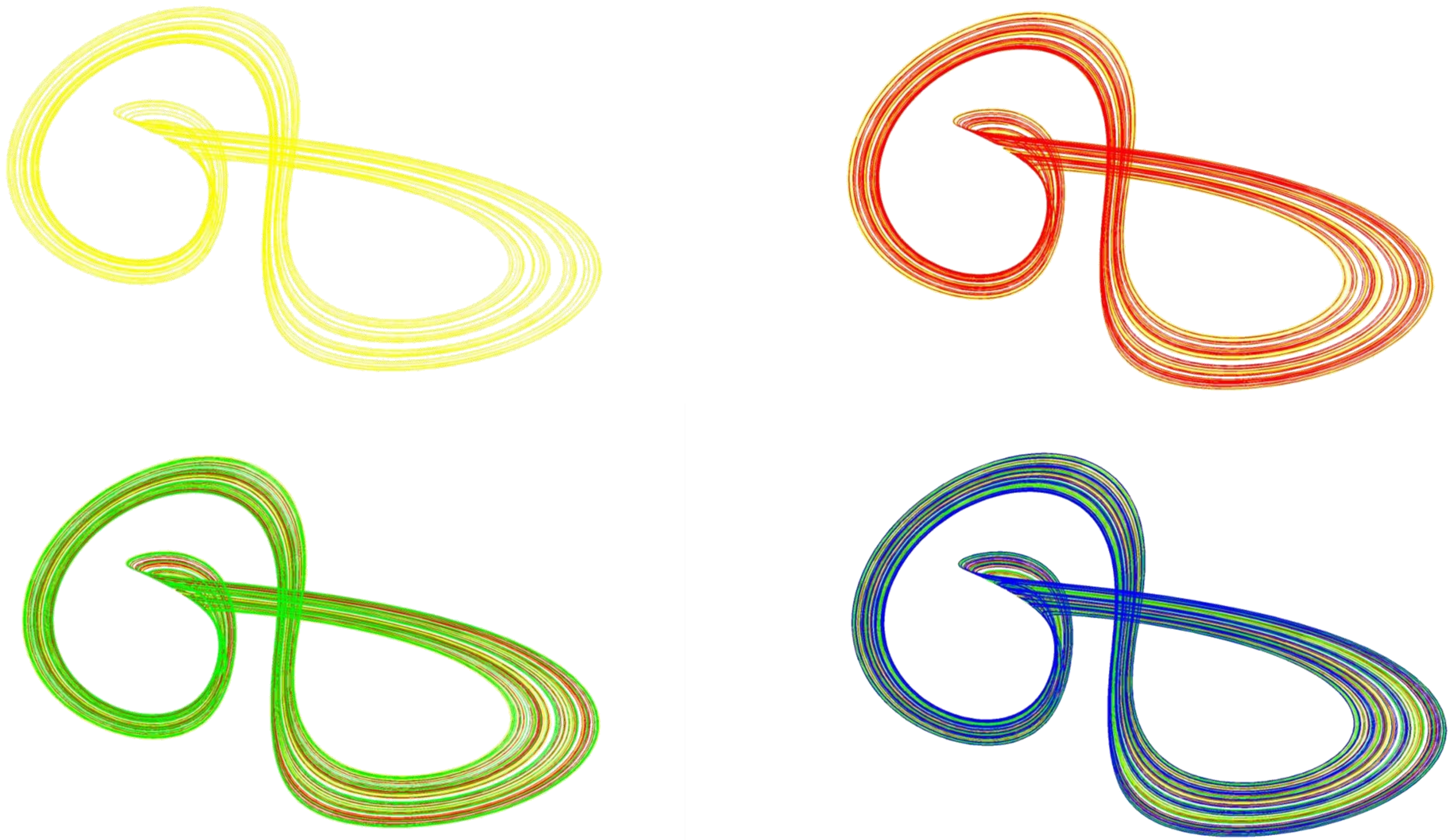
kvaziperiodické chování: po určité, přesně dané kvaziperiodě, se vše opakuje s určitou přesností, čím větší přesnost, tím delší kvaziperioda je třeba

chaotické chování: po určité, avšak naprosto neodhadnutelné době, se systém dostane libovolně blízko k výchozímu stavu (*topologická tranzitivita*), poté se vše přibližně opakuje jen po omezenou dobu, dříve, nebo později však nastane velmi odlišný vývoj (*citlivá závislost*). Signál má spojité spektrum ve frekvenční oblasti (*existence v.h. množiny nestabilních periodických trajektorií*)

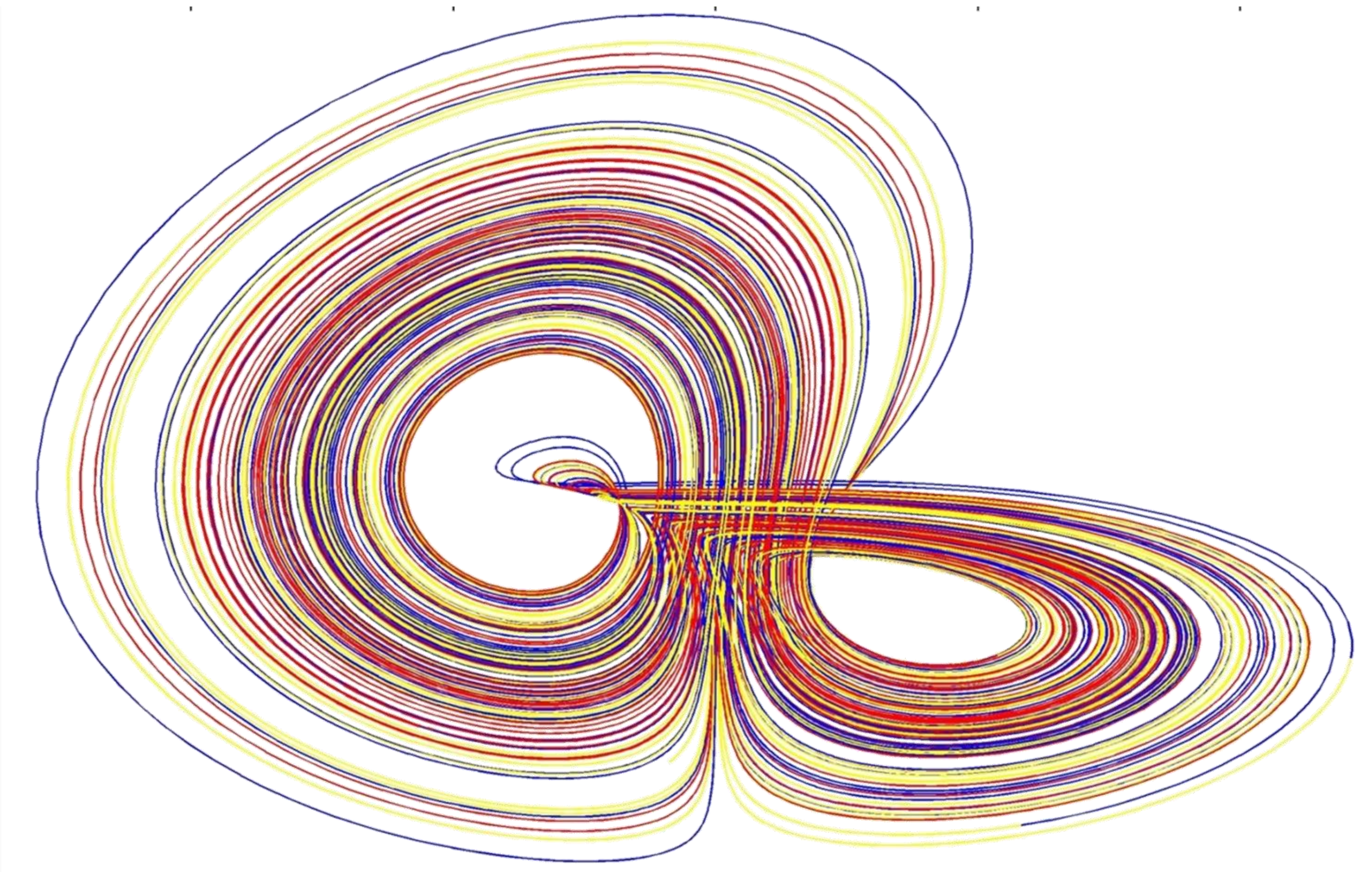
Silná závislost na počátečních podmínkách



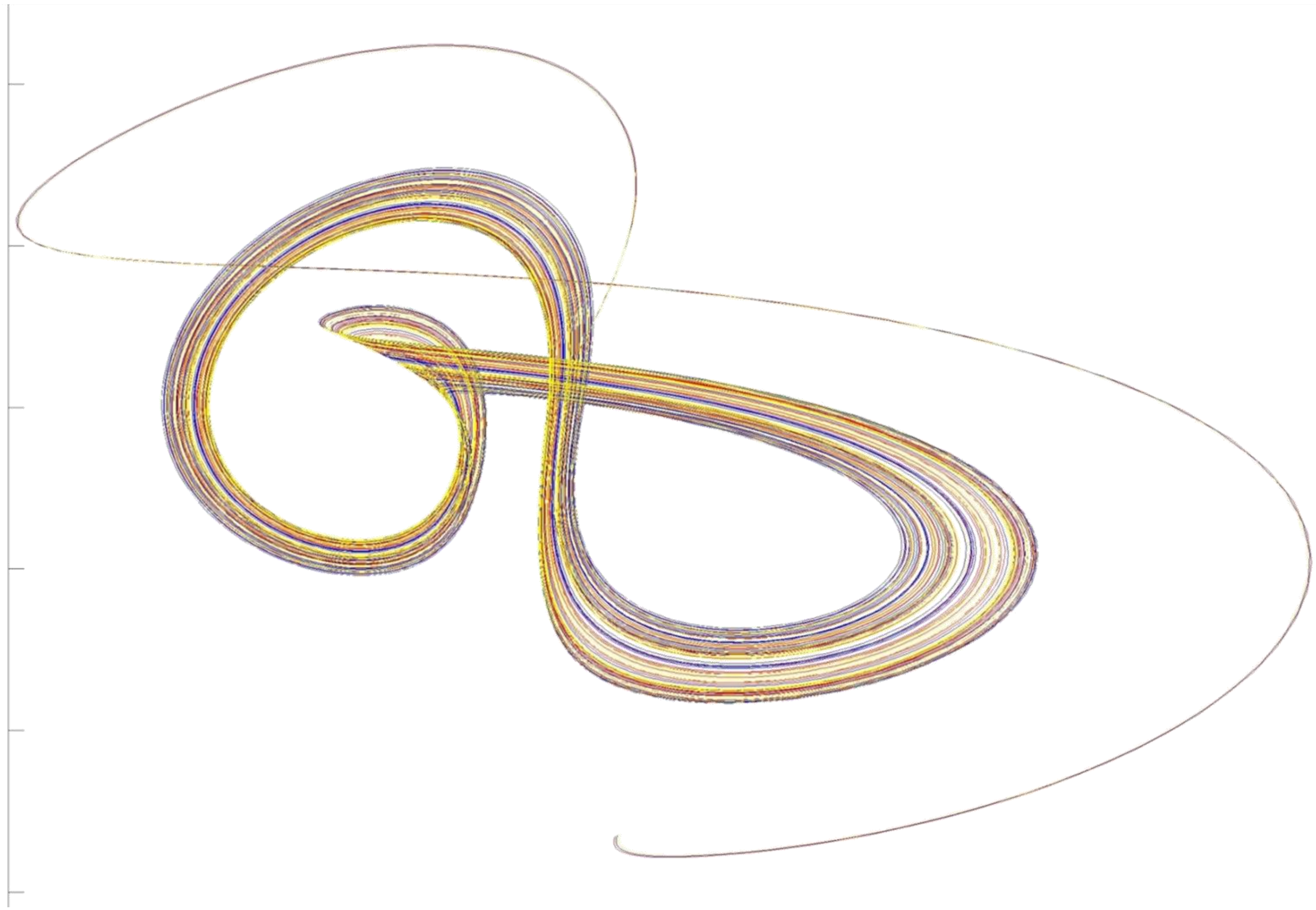
Topologická tranzitivita



Topologická tranzitivita



Silná závislost a topologická tranzitivita



Využití chaosu - šifrování

Popsané vlastnosti chaosu se zřejmě hodí k zabezpečení dat pomocí šifrování, neboť odpovídají ***konfúzním a difuzním*** požadavkům na kryptografické algoritmy

Některé známé metody:

- Chaotické maskování
- Chaos shift keying (CSK)
  - klasický, pomocí synchronizace
  - ACSK (Anti-synchronization CSK), pomocí desynchronizace
- Chaotická modulace (využití inverzního systému)
- A další …

Ve všech případech je nezbytně zapotřebí synchronizace parametrizovaných chaotických systémů

Zobecnělý Lorenzův systém

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_2 + a_{12}x_1$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - x_1x_3$$
$$\dot{x}_2 = -\lambda_3 x_3 + x_1x_2$$

Netriviální GLS (má alespoň jedno složitější řešení) je ekvivalentní lineární změnou souřadnic *z*=*Tx* následující kanonické formě GLS

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 - (z_1 - z_2)z_3$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 - (z_1 - z_2)z_3$$
$$\dot{z}_3 = \lambda_3 z_1 - (z_1 - z_2)(\tau z_2 - z_1)$$

Vlastní čísla PL v počátku - Šilnikovova podmínka chaosu v blízkosti homoklinicity a hyperbolického ekvilibria

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$$

$$\tau \in (\text{-}1, \infty)$$

- Šilnikovova podmínka je kvalitativní a velmi „robustní“
- „Ryze nelineární“ parametr *tau* - přesné laděni složitých nelineárních jevů

Hyperbolicky zobecnělý Lorenzův systém

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_2 + a_{12}x_1$$
$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_1x_3$$
$$\dot{x}_2 = -\lambda_3 x_3 + x_1x_2$$

Netriviální HGLS (má alespoň jedno složitější řešení) je ekvivalentní lineární změnou souřadnic *z=Tx* následující kanonické formě HGLS (Čelikovský, *Kybernetika,* 2005)

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1 - (z_1 - z_2)z_3$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2 - (z_1 - z_2)z_3$$
$$\dot{z}_3 = \lambda_3 z_1 - (z_1 - z_2)(\tau z_2 - z_1)$$

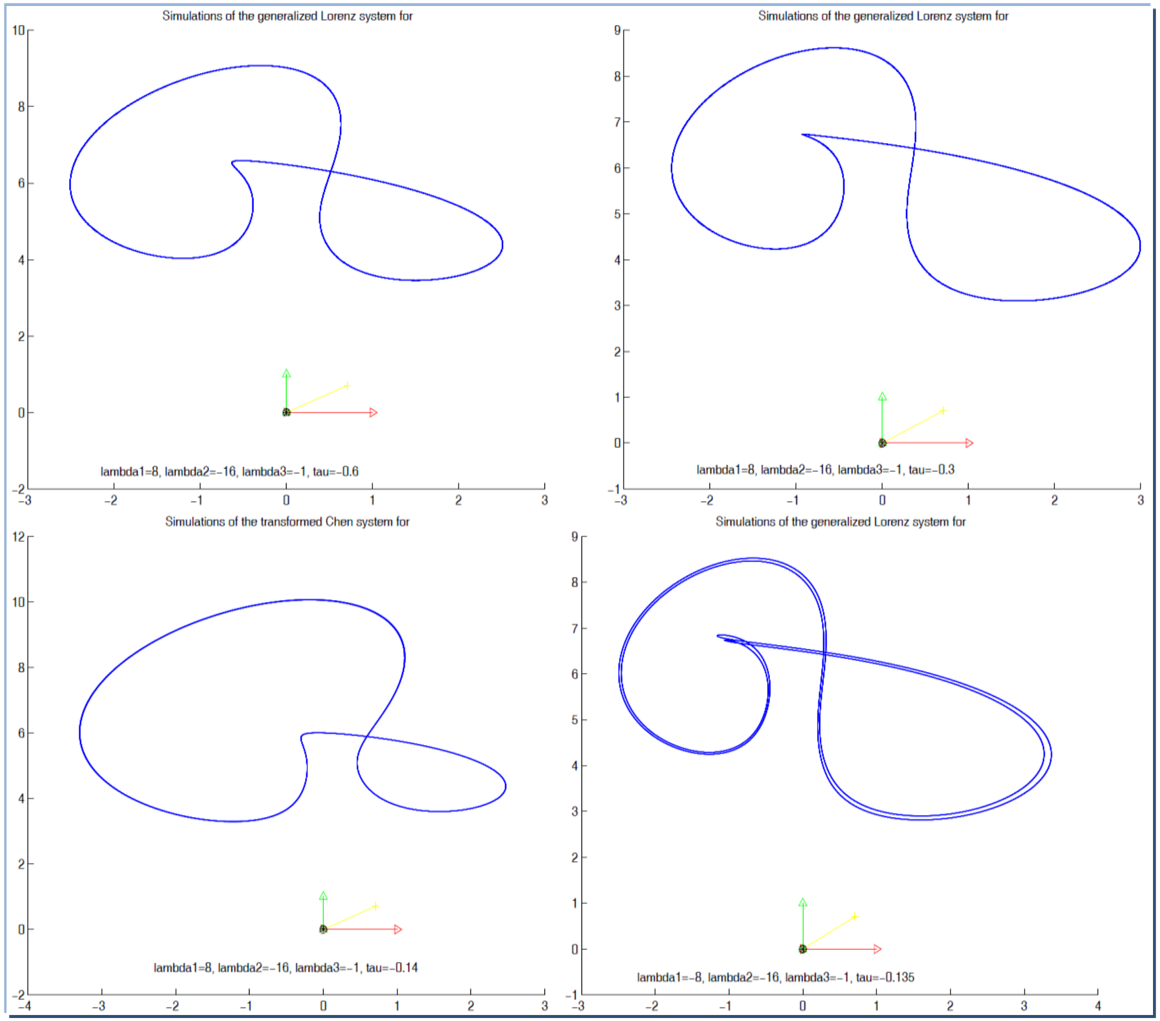
Vlastní čísla PL v počátku - Šilnikovova podmínka chaosu v blízkosti homoklinicity a hyperbolického ekvilibria

$$-\lambda_2 > \lambda_1 > -\lambda_3 > 0$$

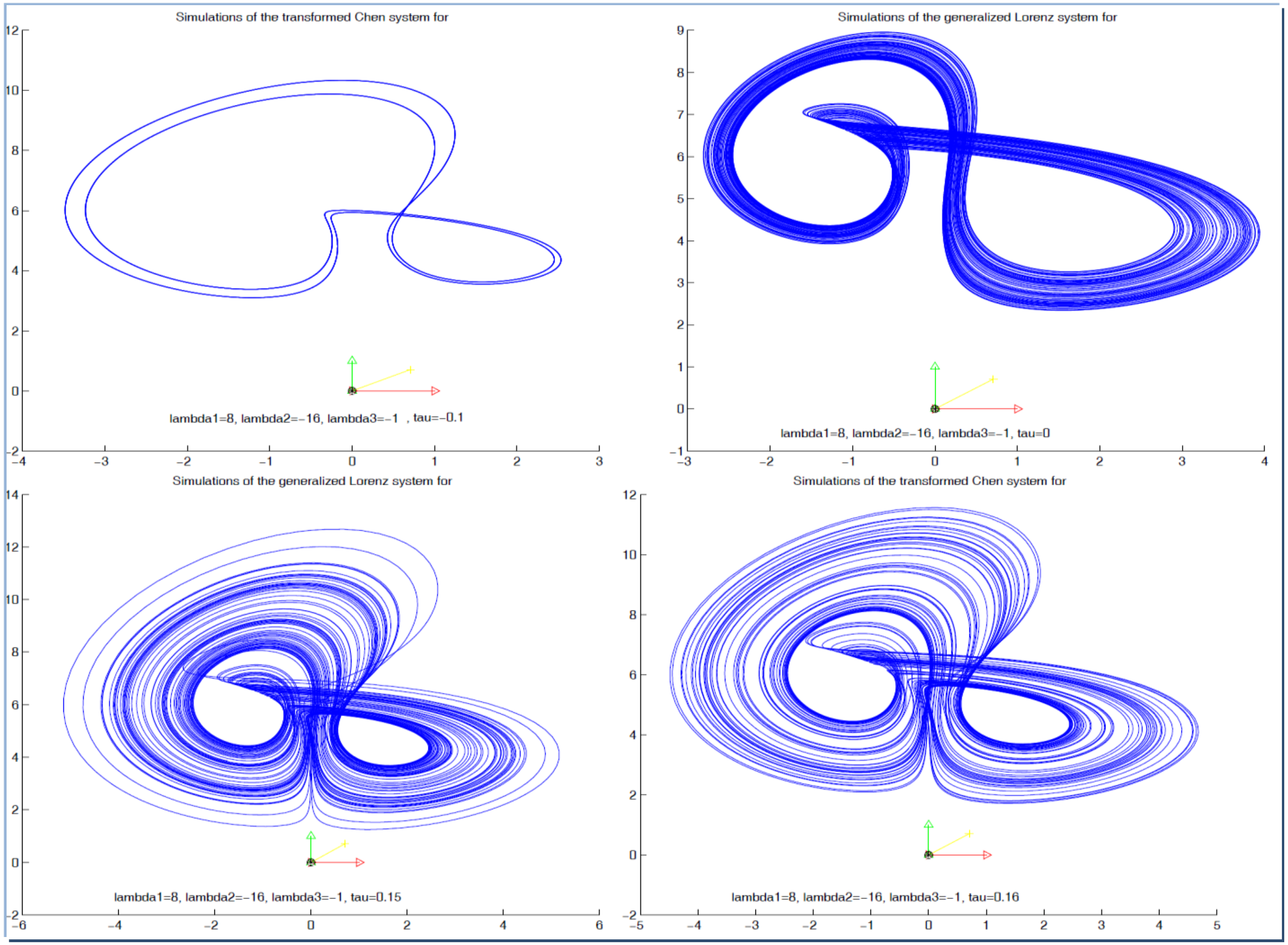
$$\tau \in (-\infty,-1)$$

- *tau*=1 speciální případ ekvivalentní tzv. Shimidzu-Moriokovu systému
- přehledná klasifikace v Čelikovský, Chen, *Chaos, Solitons & Fractals* 2005

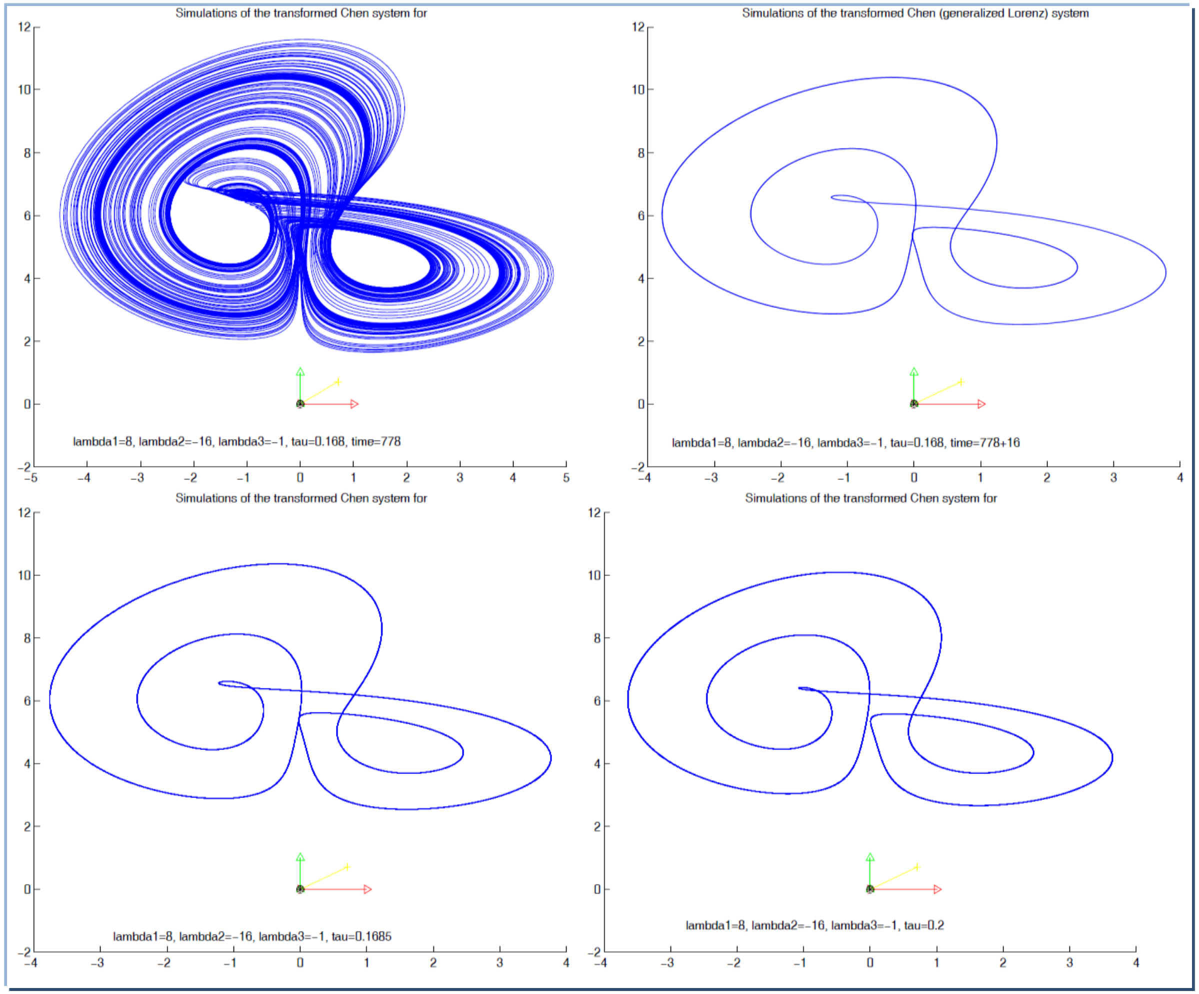
Limitní cyklus a zdvojení jeho periody



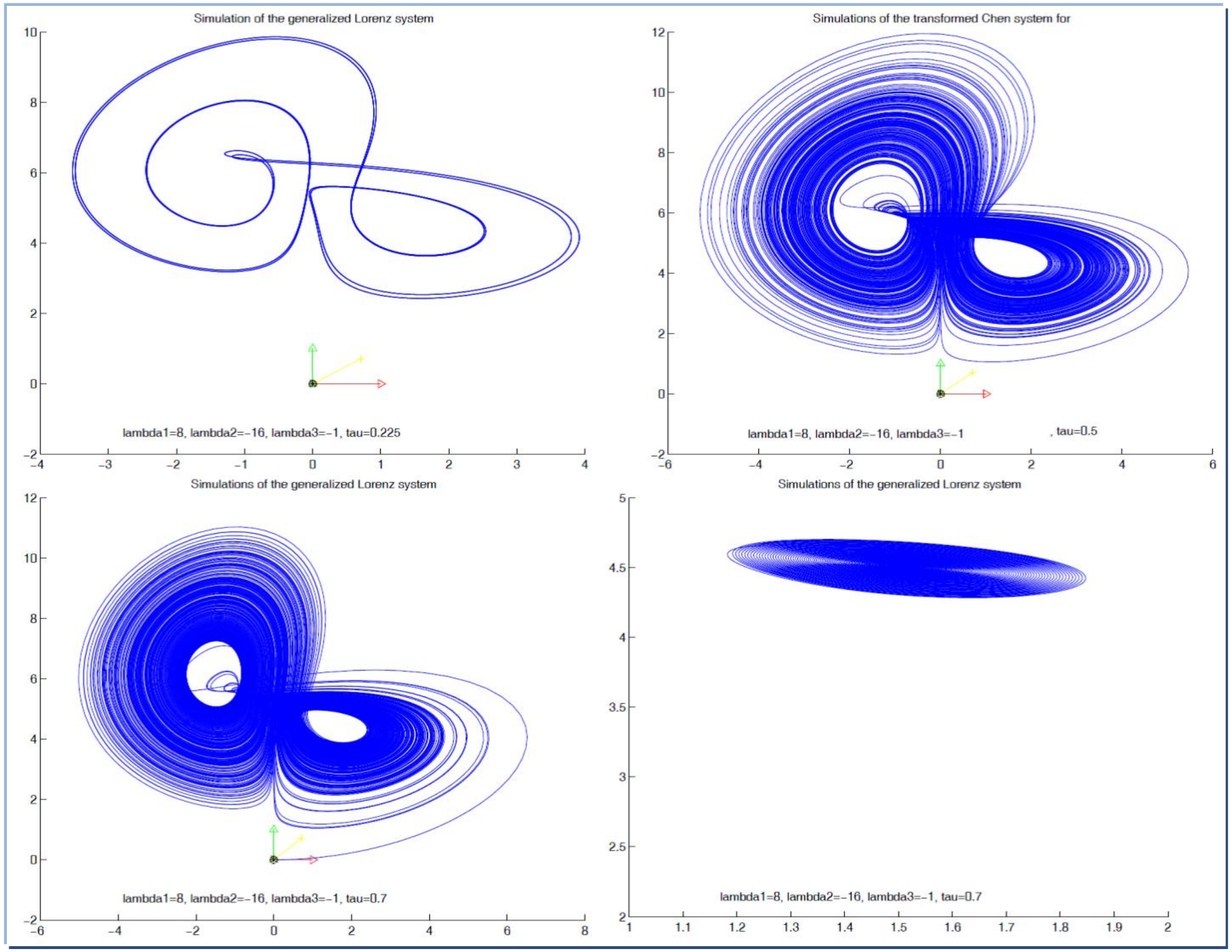
Od zdvojení periody k chaosu



Chaos ztrátou stability limitního cyklu



Klasický Lorenzův atraktor zdvojením periody a ztráta jeho globální atraktivity



Dominantní atraktivita ekvilibrií a nevýrazný chaos v okolí homoklického orbitu