INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Replikátorová a adaptivní dynamika

Učební texty k semináři

Autor:

Doc. RNDr. Zdeněk Pospíšil, Dr. (MU PřF ÚMS)

Datum:

2. 2. 2010

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

TENTO STUDIJNÍ MATERIÁL JE SPOLUFINANCOVÁN EVROPSKÝM SOCIÁLNÍM FONDEM A STÁTNÍM ROZPOČTEM ČESKÉ REPUBLIKY

Obsah

1 Úvod **2**

2 Replikátorová rovnice **4**
2.1 Odvození rovnice . . . 4
2.2 Základní vlastnosti řešení . . . 6
2.3 Rovnice s lineárními zdatnostmi . . . 9

3 (Bi)maticové hry **12**
3.1 Základní pojmy . . . 12
3.2 Replikátorová rovnice pro bimaticovou hru . . . 15
3.3 Další vlastnosti replikátorové rovnice (2.3) . . . 18

4 Rozšíření **21**
4.1 Adaptivní dynamika . . . 21
4.2 Replikátorová dynamika v prostoru . . . 22

5 Alternativní přístupy **23**
5.1 Diskrétní dynamika . . . 23
5.2 Imitační dynamika . . . 24

Kapitola 1

Úvod

V roce 1973 publikovali John Maynard Smith a George Price v Nature [5] základní článek o logice konfliktů mezi zvířaty. Jejich záměrem bylo matematicky modelovat některé aspekty biologické evoluce. Jedná se v podstatě o boj každého s každým, přičemž účastníci konfliktu nemají nebo neumějí zpracovat informace o soupeřích. Maynard Smith a Price používali pojmy a metody teorie her.

Podobné myšlenky v roce 1978 vyjádřili Taylor a Jonker [10] v pojmech obyčejných diferenciálních rovnic. Jejich článek však neměl žádný ohlas a v roce 1981 se nezávisle na nich stejnými rovnicemi zabývali Peter Schuster a Karl Sigmund [9]. Využili je k poukázání na chybu ve slavné knize Richarda Dawkinse [1].

Spojení diferenciálních rovnic a teorie her se ukázalo jako velice plodné. V současnosti je již různými způsoby zpracováno monograficky, např. [6], [3], [11], [2] a nachází použití nejen v evoluční biologii ale také v ekonomii, psychologii, teorii rozhodování. Rozvíjenou teorii je totiž možné použít na jakékoliv konflikty s neúplnou nebo žádnou informací; umožňuje porozumět nebo alespoň získat jistý vhled do chování komplikovaných nebo komplexních systémů.

Tento text[1] nemá ambici být přehledem teorie replikátorových rovnic; to vzhledem k jejímu rozsahu není možné. Chce být pouze úvodem do této problematiky. Je zpracován především na základě knihy [3]. V následující kapitole je odvozena základní replikátorová rovnice a jsou uvedeny některé její jednoduché vlastnosti. Ve třetí kapitole jsou shrnuty některé pojmy z teorie her, které nacházejí použití při modelování dynamiky konfliktů a je ukázána souvislost maticových a bimaticových her s replikátorovými rovnicemi. Ve čtvrté kapitole jsou zmíněna možná rozšíření teorie. Poněvadž se jedná především o výsledky, které byly dosaženy počítačovými simulacemi, je tato kapitolka velmi krátká a bez matematického formalismu. V závěrečné kapitole jsou stručně zmíněny dvě možné alternativy k základním replikátorovým rovnicím při modelování podobných nebo stejných procesů.

[1] V této variantě textu jsou opraveny překlepy vyskytující se v textu tištěném pro účastníky semináře, je doplněn o příklad na konci druhé kapitoly a seznam literatury rozšířen o dvě knihy.

Pro porozumění předloženému textu je potřebná znalost matematické analýzy a lineární algebry v rozsahu obvyklých vysokoškolských kursů. Užitečné je i nějaké povědomí o kvalitativní teorii obyčejných diferenciálních rovnic; skripta [4] představují vhodný zdroj.
Používaná symbolika je standardní. Připomeňme pouze, že $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ a $\bar{\mathbb{R}}_+$ označují množinu reálných čísel, kladných reálných čísel a nezáporných reálných čísel. Vektory jsou značeny tučnými symboly, jejich složky kurzívou a jsou rozlišeny dolními indexy. Pokud to bude možné, složky vektoru budou značeny stejnými písmeny jako vektor, tj. vektor $\boldsymbol{x}$ má složky x_i. Někdy bude užitečné složky vektoru značit indexy přidanými k symbolu vektoru v závorce, tj. $x_i = (\boldsymbol{x})_i$. Vektor $\boldsymbol{e}_k$ je k-tý vektor standardní báze (jeho složky jsou nuly, pouze k-tá je jednička, $(\boldsymbol{e}_k)_j = \delta_{jk}$, kde δ_{jk} je Kroneckerův symbol), symbol $\mathbf{1}$ označuje vektor, jehož všechny složky jsou jedničky. Nosič n-rozměrného vektoru $\boldsymbol{x}$ je množina indexů, pro které jsou složky vektoru nenulové,

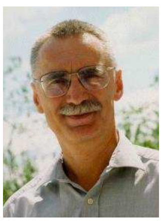
$$\operatorname{supp} \boldsymbol{x} = \{i \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_i \neq 0\}.$$

Matice jsou značeny bezpatkovým fontem, jejich složky kurzívou a jsou rozlišeny dvojitými indexy; matice A má v i-tém řádku a j-tém sloupci složku a_{ij}. Jednotková matice je značena E a nulová O. Maticové násobení je implicitní (AB je součin matic A a B). Pokud ve formulích vystupují vektory i matice, jsou vektory chápány jako sloupcové. Transpozice matic je označena $^\mathsf{T}$, symbol $\circ$ označuje Hadamardův součin matic se stejnými rozměry, součin „po složkách“ – $\mathsf{A} \circ \mathsf{B}$ je matice se složkami $a_{ij}b_{ij}$.

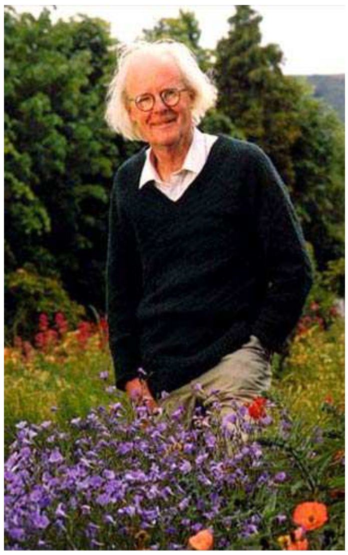
Leo Jonker

Peter D. Taylor

Peter Schuster



Karl Sigmund



John Maynard Smith

Kapitola 2

Replikátorová rovnice

2.1 Odvození rovnice

Představme si „populaci" nějakých „jedinců", kteří jsou rozděleni do několika „typů". Jedinci jednak produkují potomky, kteří jsou stejného typu a také „umírají". Prostředí, v němž tento proces probíhá, je nějakým způsobem omezené, jedinců nemůže být nekonečně mnoho. Proto „přebyteční" jedinci umírají, případně se vůbec „nenarodí". Každá „subpopulace" jedinců stejného typu může omezovat nebo naopak rozšiřovat prostředí pro jednotlivé subpopulace ostatních typů.

V popsané situaci můžeme použít základní dogma darwinismu: přežívat a množit se budou subpopulace, které jsou zdatnější a ty méně zdatné budou vymírat. Již z této formulace je slyšet, že zdatnost subpopulace není nějaká objektivně daná veličina, je vztažená ke zdatnostem ostatních subpopulací. Přesněji tedy lze říci, že přežívat a množit se budou ty subpopulace, které mají zdatnost větší, než je zdatnost průměrná nebo celková. Přežívání a množení subpopulace se projevuje nárůstem její velikosti. To ovšem ještě neznamená, že úspěšné subpopulace jsou ty a jen ty, jejichž velikost narůstá. I velikost neúspěšné subpopulace může růst, její neúspěšnost se může projevovat tím, že velikosti ostatních subpopulací rostou ještě rychleji. Samotná velikost subpopulace tedy nemůže charakterizovat úspěšnost nebo zdatnost subpopulace, výstižnější charakteristikou je zastoupení dané subpopulace v populaci celkové. Dosavadní úvahy můžeme vyjádřit tak, že *změna zastoupení subpopulace je úměrná rozdílu její zdatnosti od zdatnosti celkové.*

Tento závěr vyjádříme přesněji, rovnicí. K tomu zavedeme označení:
x_i – relativní zastoupení i-té subpopulace,
f_i – zdatnost (fitness) i-té subpopulace;
pokud je n různých typů subpopulací, celková velikost i-té subpopulace je N_i a celková velikost populace je N, platí

$$x_i = \frac{N_i}{N},\ i = 1, 2, \dots, n, \qquad \sum_{i=1}^{n} N_i = N, \qquad \text{tedy} \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Průměrnou zdatnost nyní vyjádříme jako vážený průměr jednotlivých zdatností, vahami jsou relativní zastoupení jednotlivých subpopulací,

$$\bar{f} = \sum_{j=1}^{n} x_j f_j.$$

Chceme popsat dynamiku procesu, proto považujeme jednotlivá zastoupení subpopulací za funkce času, $x_i = x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Zdatnost jedné subpopulace závisí na tom, zda a v jaké míře jsou přítomny subpopulace, které ji omezují nebo podporují. Může také záviset na tom zda je subpopulace velká nebo malá; to totiž může ovlivnit, zda se projeví nějaká vnitrodruhová konkurence nebo kooperace. Jednotlivé zdatnosti jsou tedy funkcí přítomnosti jednotlivých subpopulací, $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Docházíme tedy k „systému rovnic"

$$\text{časová změna } x_i \sim f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

V něm je potřeba specifikovat úměrnost „$\sim$" a „časovou změnu". Rozhodneme se pro přímou úměrnost s kladným koeficientem c a relativní změnu zastoupení subpopulace. Předchozí „systém rovnic" tedy zapíšeme jako

$$\frac{x_i'}{x_i} = c\left(f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

nebo v explicitním tvaru

$$x_i' = c x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Časovou jednotku můžeme zvolit tak, aby se konstanta úměrnosti c rovnala jedné. Dostaneme tak *obecnou replikátorovou rovnici*

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x})\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{2.1}$$

Přesněji řečeno, (2.1) je systém n obyčejných diferenciálních rovnic, který můžeme nejprve přepsat ve tvaru $x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^{\mathsf{T}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $i = 1, 2, \ldots, n$ a pak zapsat jako jednu rovnici vektorovou

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ \left((\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\boldsymbol{1}^{\mathsf{T}})\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\right).$$

2.2 Základní vlastnosti řešení

Dále budeme předpokládat, že rovnice (2.1) s počáteční podmínkou takovou, že $x_1(0) + x_2(0) + \cdots + x_n(0) = 1$ je jednoznačně řešitelná. K tomu stačí, např. aby všechny funkce f_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ byly spojitě diferencovatelné. Ukážeme několik jednoduchých vlastností rovnice (2.1)

Tvrzení 1. Pokud řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (2.1) splňuje počáteční podmínku

$$x_1(0) + x_2(0) + \cdots + x_n(0) = 1,$$

tj. $\mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}(0) = 1$, pak

$$x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) = 1 \text{ pro všechna } t \geq 0.$$

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení rovnice (2.1). Označme $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. Pak

$$S' = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right) = \bar{f}(\boldsymbol{x}) - S\bar{f}(\boldsymbol{x}),$$

což je lineární rovnice pro neznámou funkci S. Její jediné řešení je

$$S(t) = 1 + \big(S(0) - 1\big)\mathrm{e}^{-\int\limits_0^t \bar{f}(\boldsymbol{x}(\tau))\mathrm{d}\tau}.$$

Je-li tedy $S(0) = 1$, pak $S(t) = 1$ pro všechna $t \geq 0$. □

Tvrzení 2. Pokud existuje index $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takový, že $x_i(0) = 0$, pak $x_i(t) = 0$ pro pro všechna $t \geq 0$.
Důkaz: Nechť $\boldsymbol{x}$ je řešení rovnice (2.1). Funkce $x_i(t) \equiv 0$ je řešením skalární rovnice

$$x_i' = x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x}) \right).$$

Tvrzení tedy plyne z předpokládané jednoznačnosti řešení systému (2.1). □

Tvrzení 1 a 2 říkají, že n-rozměrný simplex

$$S_n = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \bar{\mathbb{R}}^n_+ : x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1 \right\} = \\ = \left\{ \boldsymbol{x} \in \bar{\mathbb{R}}^n_+ : \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 1 \right\},$$

jeho hranice S_n^∂ a jako důsledek jednoznačnosti řešení také vnitřek n-rozměrného simplexu

$$S_n^\circ = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ : \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x} = 1 \right\}$$

jsou invariantní množiny systému (2.1). Jinak řečeno, při vývoji popsaném replikátorovou rovnicí (2.1) se nemění počet subpopulací, tj. subpopulace, která nebyla na začátku přítomná, se také nemůže objevit a subpopulace, která byla na začátku přítomná, nemůže v konečném čase vymizet. Samozřejmě že z tvrzení 1 a 2 neplyne, že by nemohla existovat složka x_i řešení systému (2.1) taková, že $x_i(0) > 0$, $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$. Nějaká subpopulace může v „dlouhém časovém období“ vymřít.

Z biologického hlediska tedy replikátorová rovnice popisuje selekci, tj. deterministickou složku evoluce, nikoliv mutace nebo jiné stochastické procesy účastnící se evoluce.

Tvrzení 3. Nechť $\Psi : S_n \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Položme $g_i = f_i + \Psi$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Pak $\boldsymbol{x}$ je řešením rovnice (2.1) právě tehdy, když je současně řešením rovnice

$$x_i' = x_i \left(g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(\boldsymbol{x}) \right), \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) \right) = \\ &= x_i \left(f_i(\boldsymbol{x}) + \Psi(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(\boldsymbol{x}) - \Psi(\boldsymbol{x}) \sum_{j=1}^{n} x_j \right) = \\ &= x_i \left(g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j \big(f_j(\boldsymbol{x}) + \Psi(\boldsymbol{x}) \big) \right) = x_i \left(g_i(\boldsymbol{x}) - \sum_{j=1}^{n} x_j g_j(\boldsymbol{x}) \right). \quad \square \end{aligned}$$

Rovnice vystupující v tvrzení má stejný tvar jako replikátorová rovnice (2.1), takže funkce g_i také vyjadřují zdatnosti subpopulací. Tvrzení 3 tedy říká, že přičtení nějaké hodnoty ke zdatnostem subpopulací neovlivní vývoj jejich zastoupení v populaci. Zdatnosti lze tedy volit například tak, aby průměrná zdatnost byla nulová, tj. nemusíme přemýšlet o zdatnostech, ale o jejich odchylkách od zdatnosti celkové.

Věta 1. Nechť existuje bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ a jeho okolí U tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) > \bar{f}(\boldsymbol{x}) \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap (U \setminus \{\hat{\boldsymbol{x}}\}) \, . \tag{2.2}$$

Pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je asymptoticky stabilní stacionární bod systému (2.1)

Důkaz: Okolí U lze volit tak, aby platilo $\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}} = \operatorname{supp}\boldsymbol{x}$ pro každý bod $\boldsymbol{x} \in S_n \cap U$. Podle Jensenovy nerovnosti[1] je

$$\sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i \ln\frac{\hat{x}_i}{x_i} = \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i\left(-\ln\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right) \geq -\ln\left(\sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i\frac{x_i}{\hat{x}_i}\right) = \\ = -\ln\sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} x_i = -\ln 1 = 0$$

a rovnost nastane právě tehdy, když $\boldsymbol{x} = \alpha\hat{\boldsymbol{x}}$ pro nějakou konstantu α; poněvadž $\boldsymbol{x} \in S_n$, $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$, musí být $\alpha = 1$. Platí tedy

$$\sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i \ln\hat{x}_i \geq \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i \ln x_i, \quad \text{neboli} \quad \prod_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i^{\hat{x}_i} \geq \prod_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} x_i^{\hat{x}_i},$$

pro všechna $\boldsymbol{x} \in U \cap S_n$, přičemž rovnost nastane pro $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}$.
Označme

$$V(\boldsymbol{x}) = \prod_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i^{\hat{x}_i} - \prod_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} x_i^{\hat{x}_i}, \qquad P(\boldsymbol{x}) = \prod_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} x_i^{\hat{x}_i}.$$

Pak je

$$V(\hat{\boldsymbol{x}}) = 0, \qquad V(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ pro } \boldsymbol{x} \neq \hat{\boldsymbol{x}}, \qquad P(\boldsymbol{x}) > 0 \text{ pro } \boldsymbol{x} \in U \cap S_n.$$

Dále podle předpokladu je

$$\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\boldsymbol{x})}{P(\boldsymbol{x})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln P(\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i \ln x_i = \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i\frac{x_i'}{x_i} = \\ = \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i\big(f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}\boldsymbol{x}\big) = \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x}) \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i = \\ = \sum_{i\in\operatorname{supp}\hat{\boldsymbol{x}}} \hat{x}_i f_i(\boldsymbol{x}) - \bar{f}(\boldsymbol{x}) > 0$$

a tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\boldsymbol{x}) > 0 \quad \text{a z toho} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(\boldsymbol{x}) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P(\boldsymbol{x}) < 0.$$

To znamená, že funkce V je ljapunovskou funkcí rovnice (2.1) v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$ a tento bod je stejnoměrně asymptoticky stabilní. □

[1] Buď φ diferencovatelná ryze konvexní funkce definovaná na intervalu I. Pak pro všechna čísla $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in I$ a každý bod $\boldsymbol{p} \in S_k^\circ$ platí

$$\varphi\left(\sum_{\iota=1}^{k} p_\iota\xi_\iota\right) \leq \sum_{\iota=1}^{k} p_\iota\varphi(\xi_\iota).$$

Rovnost nastane právě tehdy, když $\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_k$.

Věta nás opravňuje zavést následující terminologii. Bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$, který má vlastnost (2.2) se nazývá *evolučně stabilní stav (vzhledem ke zdatnostem $f_1, f_2 \ldots, f_n$)*. Pokud zastoupení subpopulací dosáhne tohoto stavu, dále se nevyvíjí. Pokud se „trochu změní“ struktura populace (tj. zastoupení jednotlivých subpopulací, nikoliv jejich počet) v evolučně stabilním stavu, znovu se do tohoto stavu dostane.

2.3 Rovnice s lineárními zdatnostmi

Zvláštní pozornost si zasluhuje replikátorová rovnice (2.1), v níž jsou zdatnosti f_i dány lineárními homogenními funkcemi, tj.

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Replikátorová rovnice má v takovém případě tvar

$$x_i' = x_i \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_j a_{jk} x_k \right), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Koeficienty a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ představují složky čtvercové matice A řádu n. Zdatnosti jsou tedy dány výrazy $f_i(\boldsymbol{x}) = (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i$ a rovnici můžeme stručněji zapsat jako

$$x_i' = x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

nebo

$$x_i' = x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Také tento systém můžeme zapsat jako jednu rovnici vektorovou

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x} \circ \big((\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big).$$

Tvrzení 4. Řešení rovnice (2.3) se nezmění, pokud k matici A přičteme nějakou diagonální matici, nebo k nějakému sloupci matice A přičteme konstantní vektor, nebo k nějakému řádku matice A přičteme konstantní vektor.

Důkaz: Nechť $\boldsymbol{c}$ je libovolný n-rozměrný vektor. První část dokazovaného tvrzení dostaneme z Tvrzení 3 volbou funkce $\Psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c} \circ \boldsymbol{x}$, druhou část volbou $\Psi(\boldsymbol{x}) = x_j\boldsymbol{c}$ pro nějaký index $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ a třetí část volbou $\Psi(\boldsymbol{x}) = (0, 0, \ldots, 0, \boldsymbol{c}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}, 0, \ldots, 0)^\mathsf{T}$. □

Bez újmy na obecnosti tedy můžeme předpokládat, že matice A má na diagonále nuly, nebo že tato matice má nulový některý – např. poslední – řádek nebo sloupec.

Podmínku (2.2) můžeme v případě zdatností daných lineárními funkcemi přeformulovat: bod $\hat{\boldsymbol{x}} \in S_n$ představuje evolučně stabilní stav, jestliže existuje jeho okolí U takové, že

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x} > \boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\mathsf{A}\boldsymbol{x}, \quad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in S_n \cap \big(U \setminus \{\boldsymbol{x}\}\big).$$

Rovnice (2.3) je vlastně systémem n nelineárních rovnic s kubickými nelinearitami. Nejdůležitější věta této kapitoly říká, že ji lze transformovat na systém $n-1$ rovnic s nelinearitami kvadratickými:

Věta 2. Položme $b_{ij} = a_{nj} - a_{ij}$, $r_i = a_{in} - a_{nn}$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, n-1$. Transformace nezávisle proměnné (času) i neznámých funkcí daná rovnostmi

$$\tau = \int_0^t x_n(s)\mathrm{d}s, \qquad y_j = \frac{x_j}{x_n}, \quad j = 1, 2, \ldots, n-1$$

převádí trajektorie replikátorové rovnice (2.3) začínající ve vnitřku simplexu S_n° na trajektorie Lotkova-Volterrova systému

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}\tau} = y_j\left(r_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}y_k\right), \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1 \tag{2.4}$$

začínající uvnitř pozitivního orthantu $\mathbb{R}_+^{n-1}$.

Důkaz: Platí $\sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j = \dfrac{1}{x_n}\sum\limits_{j=1}^{n-1} x_j = \dfrac{1}{x_n}(1 - x_n) = \dfrac{1}{x_n} - 1$. Odtud plyne

$$x_n = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j} \quad \text{a dále} \quad x_i = \frac{y_i}{1 + \sum\limits_{j=1}^{n-1} y_j}.$$

To znamená, že zobrazení $y_j = \dfrac{x_j}{x_n}$, $j = 1, 2, \ldots, n-1$ je bijekce vnitřku simplexu S_n° na vnitřek pozitivního $n-1$-rozměrného orthantu.

Podle Tvrzení 1 a 2 pro libovolné řešení $\boldsymbol{x}$ rovnice (2.3) platí

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = x_n(t) > 0;$$

transformace nezávisle proměnné je tedy také prostá. Nyní máme

$$\frac{\mathrm{d}y_j}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}\frac{x_j}{x_n}}{\mathrm{d}t}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{x_j'x_n - x_jx_n'}{x_n^2}\,\frac{1}{x_n} = \frac{1}{x_n^2}\left(x_j' - x_j\frac{x_n'}{x_n}\right) =$$

$$= \frac{1}{x_n^2}\big(x_j\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big) - x_j\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_n - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\big)\big) =$$

$$= \frac{x_j}{x_n^2}\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j - (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_n\big) = \frac{x_j}{x_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k - \sum_{k=1}^{n} a_{nk}x_k\right) =$$

$$= \frac{x_j}{x_n^2}\sum_{k=1}^{n}(a_{jk} - a_{nk})\,x_k = \frac{x_j}{x_n^2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}(a_{jk} - a_{nk})\,x_k + (a_{jn} - a_{nn})\,x_n\right) =$$

$$= \frac{x_j}{x_n}\left(a_{jn} - a_{nn} - \sum_{k=1}^{n-1}(a_{nk} - a_{jk})\frac{x_k}{x_n}\right) = y_j\left(r_j - \sum_{k=1}^{n-1} b_{jk}y_k\right). \qquad \square$$

Věta 2 ukazuje souvislost evoluce (selekce) s ekologií. Její platnost ospravedlňuje volbu relativní změny zastoupení jednotlivých subpopulací při odvození (nebo konstrukci) replikátorové rovnice na str. 5.

Příklad - vývoj dvou subpopulací. Nechť $n = 2$, $\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. Rovnice (2.4) je tvaru $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = y\big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y\big)$. Řešením této rovnice s počáteční podmínkou $y(0) = y_0 > 0$ je funkce

$$y(\tau) = \frac{(a_{12} - a_{22})y_0}{(a_{21} - a_{11})y_0 + \big(a_{12} - a_{22} - (a_{21} - a_{11})y_0\big)\mathrm{e}^{(a_{22} - a_{12})\tau}}.$$

Označme $Q = \dfrac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21}}$. Platí:

- pokud $a_{12} - a_{22} > 0$, $a_{21} - a_{11} > 0$, pak $\lim\limits_{\tau\to\infty} y(\tau) = Q$, obě subpopulace přežívají;
- pokud $a_{12} - a_{22} > 0 > a_{21} - a_{11}$, pak $\lim\limits_{\tau\to\infty} y(\tau) = \infty$, druhá subpopulace vymizí;
- pokud $a_{21} - a_{11} > 0 > a_{12} - a_{22}$, pak $\lim\limits_{\tau\to\infty} y(\tau) = 0$, první subpopulace vymizí;
- pokud $a_{12} - a_{22} < 0$, $a_{21} - a_{11} < 0$, pak

  $$\lim_{\tau\to\infty} y(\tau) = \begin{cases} 0, & y_0 < Q, \\ Q, & y_0 = Q, \\ \infty, & y_0 > Q, \end{cases}$$

  může vymizet první nebo druhá subpopulace, záleží na počátečních podmínkách.

Kapitola 3

(Bi)maticové hry

Replikátorová rovnice (2.3) vlastně popisuje vývoj „populace“ rozdělené na n „subpopulací“ které jsou v nějakých vzájemných interakcích. Složky matice A tyto interakce charakterizují; lze říci, že např. v případě $a_{ij} > 0$ „vyhrála“ i-tá subpopulace v interakci (konfliktu) se subpopulací j-tou příspěvek ke své zdatnosti. Podobnými situacemi – konflikty několika účastníků – se zabývá teorie her. Proto v této kapitole připomeneme některé pojmy z této teorie a ukážeme jejich souvislost s rovnicemi replikátorovými.

3.1 Základní pojmy

Definice 1 *Konečná hra dvou hráčů v normálním tvaru* (*bimaticová hra*) je uspořádaná čtveřice $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$, kde X, Y jsou konečné množiny a u, v jsou funkce $X \times Y \to \mathbb{R}$.
Množinu X, resp. Y, nazýváme *množina strategií prvního,* resp. *druhého, hráče.* Funkce u, resp. v, nazýváme *výplatní funkce prvního,* resp. *druhého, hráče.*

Poněvadž množiny X, Y jsou konečné, lze položit $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $Y = \{1, 2, \ldots, m\}$. Označme $a_{ij} = u(i, j)$, $b_{ji} = v(i, j)$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Při tomto označení je

$$u(i, j) = a_{ij} = \boldsymbol{e}_i^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{e}_j, \qquad v(i, j) = b_{ji} = \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{e}_i. \tag{3.1}$$

Bimaticová hra je tedy jednoznačně určena maticemi A a B, které nazýváme *výplatní matice.* Hru lze zapisovat ve tvaru

		hráč 2			
		1	2	$\dots$	m
hráč 1	1	b_{11} a_{11}	b_{21} a_{12}	$\dots$	b_{m1} a_{1m}
	2	b_{12} a_{21}	b_{22} a_{22}	$\dots$	b_{m2} a_{2m}
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
	n	b_{1n} a_{n1}	b_{2n} a_{n2}	$\dots$	b_{mn} a_{nm}

Definice 2. *Pravděpodobnostní rozšíření bimaticové hry* $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$ je uspořádaná čtveřice $\mathcal{G}^* = (X^*, Y^*, u^*, v^*)$, kde $X^* = S_n$, $Y^* = S_m$ a u^*, v^* jsou funkce $X^* \times Y^* \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y}, \qquad v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x}. \tag{3.2}$$

Zobrazení $\varphi : X \to X^*$ a $\psi : Y \to Y^*$ definovaná předpisy $\varphi(i) = \boldsymbol{e}_i$, $\psi(j) = \boldsymbol{e}_j$ jsou prostá. Proto lze množinu X (resp. Y) považovat za podmnožinu množiny X^*, resp. Y^*. Porovnáním formulí (3.1) a (3.2) vidíme, že funkci u, resp. v lze považovat za zúžení zobrazení u^*, resp. v^*, na množinu X, resp. Y. Strategiím z množin X, Y budeme říkat *ryzí*, prvkům z množin X^*, Y^* budeme říkat *smíšené strategie*.

Definice 3 Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}} \in X^*$ se nazývá *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{y} \in Y^*$, jestliže pro každou strategii $\boldsymbol{x} \in X^*$ platí

$$u^*(\bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{y}) = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \boldsymbol{y} = u^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Podobně, smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{y}} \in Y^*$ se nazývá *nejlepší odpověď na strategii* $\boldsymbol{x} \in X^*$, jestliže pro každou strategii $\boldsymbol{y} \in Y^*$ platí

$$v^*(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \boldsymbol{x} = v^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}).$$

Dvojice strategií $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^* \times Y^*$ se nazývá *rovnovážná (podle Nashe)*, jestliže $\bar{\boldsymbol{x}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{y}}$ a současně $\bar{\boldsymbol{y}}$ je nejlepší odpovědí na $\bar{\boldsymbol{x}}$, tj.

$$\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T} \mathsf{B} \bar{\boldsymbol{x}} \qquad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in X^*,\ \boldsymbol{y} \in Y^*.$$

Hráč používající rovnovážnou strategii má zaručeno, že jeho výhra se nezmenší, pokud jeho protivník použije jinou než rovnovážnou strategii. Pro oba hráče je používání rovnovážné strategie nejvýhodnější.

Definice 4. Řekneme, že konečná hra dvou hráčů $\mathcal{G} = (X, Y, u, v)$ je *symetrická,* pokud $X = Y$ a $u(i, j) = v(j, i)$ pro každé dvě ryzí strategie $i, j \in X$. Můžeme ji stručně zapsat jako $\mathcal{G} = (X, u)$.

Pro symetrickou hru platí $a_{ij} = u(i, j) = v(j, i) = b_{ij}$, tedy $\mathsf{A} = \mathsf{B}$. To znamená, že symetrická hra je jednoznačně určena maticí A a proto bývá nazývána *maticová hra.*
Dvojice strategií $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{y}}) \in X^{*2}$ maticové hry je rovnovážná, pokud platí

$$\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{y}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{y}}, \quad \bar{\boldsymbol{y}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}, \qquad \text{pro všechny } \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in X^*.$$

Strategie $\bar{x} \in X^*$ maticové hry se nazývá *symetricky rovnovážná (podle Nashe)*, pokud je dvojice $(\bar{\boldsymbol{x}}, \bar{\boldsymbol{x}})$ rovnovážná, tj. pokud

$$\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \geq \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}, \qquad \text{pro všechny } \boldsymbol{x} \in X^*.$$

Věta 1 Nechť $\mathcal{G}$ je symetrická konečná hra určená maticí A. Smíšená strategie $\bar{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážná právě tehdy, když

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{pro všechna } i \notin \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}} \tag{3.3}$$

a

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{pro všechna } i \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}}. \tag{3.4}$$

Důkaz: Nechť $\bar{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážná strategie. Pak platí

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Připusťme, že existuje $k \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}}$ tak, že $\boldsymbol{e}_k^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} < \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Pak

$$\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}}} \bar{x}_i\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{x}_k\boldsymbol{e}_k^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}} \setminus \{k\}} \bar{x}_i\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} <$$

$$< \bar{x}_k\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} + \sum_{i \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}} \setminus \{k\}} \bar{x}_i\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}},$$

což je spor, který dokazuje nutnost podmínek.
Nechť platí podmínky (3.3) a (3.4). Pak pro všechna $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ platí $\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}}$. Je-li nyní $\boldsymbol{x} \in X^*$ libovolná smíšená strategie, pak

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} \leq \sum_{i=1}^n x_i\bar{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}} = \bar{\boldsymbol{x}}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\bar{\boldsymbol{x}},$$

takže podle předchozí poznámky je $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnovážnou strategií. Podmínky jsou tedy i dostatečné. $\square$

3.2 Replikátorová rovnice pro bimaticovou hru

Jak již bylo řečeno v úvodu k této kapitole, replikátorová rovnice (2.3) vlastně jiným způsobem popisuje maticovou hru. Subpopulace odpovídají ryzím strategiím, jejich zdatnosti příslušným výplatním funkcím. Toto pozorování naznačuje, že podobně bychom mohli také bimaticové hry zapisovat pomocí diferenciálních rovnic. Modelovou situací může být interakce (konflikt?, kooperace?) samců a samic při realizaci svých genů. Prvním hráčem jsou samice, jejich strategiemi jsou možné geno- nebo fenotypy (v nejširším smyslu), druhým hráčem jsou samci. Výplatou a_{ij} samice i-tého fenotypu může být počet potomků, které má se samcem fenotypu j-tého.

Podobnými úvahami jako v kapitole 2 odvodíme rovnice

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i\big((\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}\big), \qquad && i = 1,2,\dots,n, \\ y_j' &= y_j\big((\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}\big), \qquad && j = 1,2,\dots,m, \end{aligned} \tag{3.5}$$

nebo ekvivalentně

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}, \qquad && i = 1,2,\dots,n, \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}, \qquad && j = 1,2,\dots,m. \end{aligned}$$

Také tento systém můžeme zapsat jako jednu vektorovou rovnici

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \mathsf{O} & (\mathsf{E} - \boldsymbol{x}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{A} \\ (\mathsf{E} - \boldsymbol{y}\mathbf{1}^\mathsf{T})\mathsf{B} & \mathsf{O} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}.$$

Systém (3.5) je jednoznačně řešitelný, neboť pravé strany rovnic jsou spojitě diferencovatelné podle všech x_i i podle všech y_j. Podobně jako u Tvrzení 1 a 2 z kapitoly 2 ukážeme, že množiny $S_n \times S_m$ i $S_n^\circ \times S_m^\circ$ jsou invariantními množinami systému (3.5). Také lze ukázat, že řešení systému (3.5) se nezmění, pokud k diagonálám matic A, B přičteme nějaké konstantní vektory, případně je přičteme k nějakému řádku nebo sloupci těchto matic; důkaz opakuje důkazy Tvrzení 3 a 4 z kapitoly 2.

Podle Věty 2 z kapitoly 2 lze u replikátorové rovnice (2.3) kubické nelinearity zredukovat na nelinearity kvadratické. Analogie tohoto tvrzení pro rovnici (3.5) neplatí. Ovšem i u systému (3.5) můžeme zmenšit jeho dimenzi.

Z invariance množiny $S_n \times S_m$ vzhledem k systému (3.5) totiž plyne

$$x_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} x_j, \qquad y_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j$$

Odtud dále dostaneme

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y} \;&=\; \sum_{j=1}^{m} a_{ij}y_j - \sum_{l=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_l a_{lj} y_j \;= \\
&=\; \sum_{j=1}^{m-1} a_{ij}y_j + a_{im}\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j\right) - \\
&\qquad - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1} a_{lj}y_j + a_{lm}\left(1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j\right)\right] \;=
\end{aligned}
$$

$$
= \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij} - a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{l=1}^{n} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj} - a_{lm})y_j + a_{lm}\right] \;=
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij} - a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj} - a_{lm})y_j + a_{lm}\right] - \\
& - \left(1 - \sum_{l=1}^{n-1} x_l\right)\left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{nj} - a_{nm})y_j + a_{nm}\right] \;=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij} - a_{im})y_j + a_{im} - \sum_{j=1}^{m-1}(a_{nj} - a_{nm})y_j - a_{nm} - \\
& - \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj} - a_{lm} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] \;=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \sum_{j=1}^{m-1}(a_{ij} - a_{im} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{im} - a_{nm} - \\
& - \sum_{l=1}^{n-1} x_l \left[\sum_{j=1}^{m-1}(a_{lj} - a_{lm} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] \;=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} \delta_{il}\left[(a_{lj} - a_{lm} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] - \\
& - \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1} x_l \left[(a_{lj} - a_{lm} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right] \;=
\end{aligned}
$$

$$= \sum_{l=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{m-1}(\delta_{il} - x_l)\left[(a_{lj} - a_{lm} - a_{nj} + a_{nm})y_j + a_{lm} - a_{nm}\right].$$

Označme nyní

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ij} - a_{im} - a_{nj} + a_{nm}, \quad \hat{a}_i = a_{nm} - a_{im}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$ a dále

$$\tilde{\mathsf{A}} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1(m-1)} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2(m-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{a}_{(n-1)1} & \tilde{a}_{(n-1)2} & \dots & \tilde{a}_{(n-1)(m-1)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{a}} = \begin{pmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Analogickým výpočtem lze ukázat, že

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji}x_i - \boldsymbol{y}^{\mathsf{T}}\mathsf{B}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}(\delta_{lj} - y_j)\left[(b_{lj} - b_{ln} - b_{mj} + b_{mn})x_l + b_{jn} - b_{mn}\right]$$

a potom označit

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} - b_{in} - b_{mj} + b_{mn}, \quad \hat{b}_j = b_{mn} - b_{jn}$$

pro $i = 1, 2, \dots, n-1$, $j = 1, 2, \dots, m-1$ a dále

$$\tilde{\mathsf{B}} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1(n-1)} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{b}_{(m-1)1} & \tilde{b}_{(m-1)2} & \dots & \tilde{b}_{(m-1)(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \vdots \\ \hat{b}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Provedená úvaha a výpočet ukazují, že $(n+m)$-rozměrný systém (3.5) lze zredukovat na systém $(n+m-2)$-rozměrný

$$\begin{aligned} x_i' &= x_i(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x})^{\mathsf{T}}\left(\tilde{\mathsf{A}}\boldsymbol{y} - \hat{\boldsymbol{a}}\right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ y_j' &= y_j(\boldsymbol{e}_j - \boldsymbol{y})^{\mathsf{T}}\left(\tilde{\mathsf{B}}\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{b}}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nyní označujeme $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{m-1})$.

Příklad – Konflikty se dvěma strategiemi. Nechť $n = m = 2$,

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad \mathsf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Pak systém rovnic (3.6) je tvaru

$$\begin{aligned} x' &= x(1-x)(\alpha_1 y - \alpha_2), \\ y' &= y(1-y)(\beta_1 x - \beta_2), \end{aligned}$$

kde $\alpha_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$, $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$, $\beta_1 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta_2 = b_{22} - b_{12}$. Fázovým prostorem je množina $[0,1] \times [0,1]$. Systém má stacionární řešení $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ odpovídající ryzím strategiím. V případě, že

$$\alpha_1 \neq 0, \quad 0 < \frac{\alpha_2}{\alpha_1} < 1, \qquad \beta_1 \neq 0, \quad 0 < \frac{\beta_2}{\beta_1} < 1,$$

má také vnitřní stacionární řešení

$$\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

odpovídající smíšeným strategiím. Variační matice systému je

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} (1-2x)(\alpha_1 y - \alpha_2) & \alpha_1 x(1-x) \\ \beta_1 y(1-y) & (1-2y)(\beta_1 x - \beta_2) \end{pmatrix},$$

takže

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} -\alpha_2 & 0 \\ 0 & -\beta_2 \end{pmatrix}, \qquad J(0,1) = \begin{pmatrix} \alpha_1 - \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$J(1,0) = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad J(1,1) = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 - \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$J\left(\frac{\beta_2}{\beta_1}, \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{\alpha_1 \beta_2 (\beta_1 - \beta_2)}{\beta_1^2} \\ \dfrac{\alpha_2 \beta_1 (\alpha_1 - \alpha_2)}{\alpha_1^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud je vidět, že stacionární řešení odpovídající ryzím strategiím jsou sedla nebo uzly, stacionární řešení odpovídající smíšeným strategiím je sedlo nebo nestabilní ohnisko.

3.3 Další vlastnosti replikátorové rovnice (2.3)

Věta 2. Je-li $\bar{\boldsymbol{x}}$ rovnovážnou strategií symetrické konečné hry určené maticí A, pak $\bar{\boldsymbol{x}}$ je stacionárním bodem autonomního systému (2.3).

Důkaz: Plyne bezprostředně z Věty 1 a z toho, že podmínky (3.3) a (3.4) lze přepsat na tvar

$$(\boldsymbol{e}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} \leq 0 \quad \text{pro všechna } i \notin \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}},$$

$$(\boldsymbol{e}_i - \bar{\boldsymbol{x}})^{\mathsf{T}} \mathsf{A} \bar{\boldsymbol{x}} = 0 \quad \text{pro všechna } i \in \operatorname{supp} \bar{\boldsymbol{x}}.$$

□

Obrácené tvrzení neplatí; každá ryzí strategie $\boldsymbol{e}_i$ je stacionárním bodem systému (2.3), ale ryzí strategie obecně není rovnovážná.

Věta 3. Je-li $\hat{\boldsymbol{x}} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n)^\mathsf{T} \in X^*$ stabilním stacionárním bodem systému (2.3), pak $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií symetrické konečné hry určené maticí A.

Důkaz: Označme

$$F_i(\boldsymbol{x}) = x_i \left(\boldsymbol{e}_i - \boldsymbol{x}\right)^\mathsf{T} \mathsf{A}\boldsymbol{x} = x_i \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk}x_l x_k \right).$$

Pak

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) =$$

$$= \delta_{ij} \left(\sum_{k=1}^n a_{ik}x_k - \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n a_{lk}x_l x_k \right) + x_i \left(a_{ij} - \sum_{k=1}^n a_{jk}x_k - \sum_{l=1}^n a_{lj}x_l \right) =$$

$$= \delta_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x}\right) + x_i \left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\right).$$

Prvky variační matice systému (2.3) v bodě $\hat{\boldsymbol{x}}$ tedy jsou

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) = \begin{cases} \hat{x}_i \left(a_{ij} - \boldsymbol{e}_j^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{e}_j\right), & \hat{x}_i \neq 0, \\ \delta_{ij} \left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}}\right), & \hat{x}_i = 0. \end{cases}$$

Vlastní čísla variační matice splňují rovnici

$$\det \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\hat{\boldsymbol{x}}) - \delta_{ij}\lambda \right) = 0.$$

Buď i takové, že $\hat{x}_i = 0$. Determinant rozvineme podle i-tého řádku:

$$\left(\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \lambda\right) \cdot (\text{příslušný algebraický doplněk}).$$

Odtud plyne, že pro každé i takové, že $\hat{x}_i = 0$, je číslo $\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}}$ vlastní hodnotou variační matice. Ze stability stacionárního řešení $\hat{\boldsymbol{x}}$ plyne

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i = 0.$$

Současně platí

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = 0 \quad \text{pro každé } i \text{ takové, že } \hat{x}_i \neq 0,$$

neboť $\hat{\boldsymbol{x}}$ je stacionární řešení systému (2.3). Celkem tedy

$$\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} - \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq 0 \quad \text{pro všechna } i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Je-li nyní $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i \in X^*$ libovolná smíšená strategie, pak platí

$$\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^n x_i\boldsymbol{e}_i^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \leq \sum_{i=1}^n x_i\hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} = \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}} \sum_{i=1}^n x_i = \hat{\boldsymbol{x}}^\mathsf{T}\mathsf{A}\hat{\boldsymbol{x}},$$

což znamená, že $\hat{\boldsymbol{x}}$ je rovnovážnou strategií. $\square$

Obrácené tvrzení opět neplatí. Uvažme například konečnou symetrickou hru s maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pak strategie $\bar{\boldsymbol{x}} = (0,1)^\mathsf{T}$ je rovnovážná, neboť

$$(x, 1-x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 = (0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro libovolné $x \in [0,1]$. Příslušný systém diferenciálních rovnic je

$$x' = x\left[(1,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = x(x - x^2) = x^2(1-x),$$

$$y' = y\left[(0,1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - (x,y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = y(-x^2) = -x^2y.$$

Stacionární body tedy jsou $(0,y)$, $(1,0)$ pro libovolné $y \in [0,1]$. Variační matice ve stacionárním bodě (x,y) je tvaru

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - 3x^2 & 0 \\ -2xy & -x^2 \end{pmatrix}.$$

Zejména tedy

$$J(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom této matice má dvojnásobný kořen $\lambda = 0$, což znamená, že stacionární řešení $(0,1)$ není stabilní.

Kapitola 4

Rozšíření

Uvažujme replikátorovou rovnici (2.3) s maticí

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} R & S \\ T & P \end{pmatrix},$$

pro jejíž prvky platí $T > R > P > S$ a $2R > T + S$. To je slavné „vězňovo dilema“; ryzí strategie jsou „spolupráce“ a „podraz“. Pokud hráči spolupracují, získají odměnu R (reward), pokud oba podvádí, jsou potrestáni malou (zápornou) výplatou P (punishment). Pokud ale protivník spolupracuje a první hráč ho podrazí, získá první hráč velikou výhru T (temptation) a druhý hráč dopadne s výplatou S (sucker's payoff) úplně nejhůř. Teorie her v tomto případě říká, že optimální (protože dominantní) strategie je druhá, tj. „podraz“. Analýza replikátorové rovnice ukazuje, že strategie $(0, 1)$ je asymptoticky stabilním stacionárním bodem; výsledkem vývoje tedy bude vymizení strategie „spolupráce“.

Je zřejmé, že ve „vězňově dilematu“ vede strategie „spolupráce“ k větší celkové výhře obou hráčů. Ovšem každý z nich je neustále „pokoušen“, získat pro sebe ještě více, tedy svého protivníka „podrazit“. Strategie bývají také nazývány „altruismus“ a „sobectví“. Z teorie by tedy plynulo, že se altruismus, přestože je výhodnější, nemůže vyvinout. Ovšem etologové popsali mnoho druhů altruistického chování. Proto je potřebné teorii rozšířit tak, aby vznik altruismu připouštěla.

Uvedeme dvě možnosti tohoto rozšíření. Obě jsou velmi jednoduché a v obou je možný vznik a přetrvávání altruistických strategií. První z nich byla poprvé publikována v článku [7], druhá v [8].

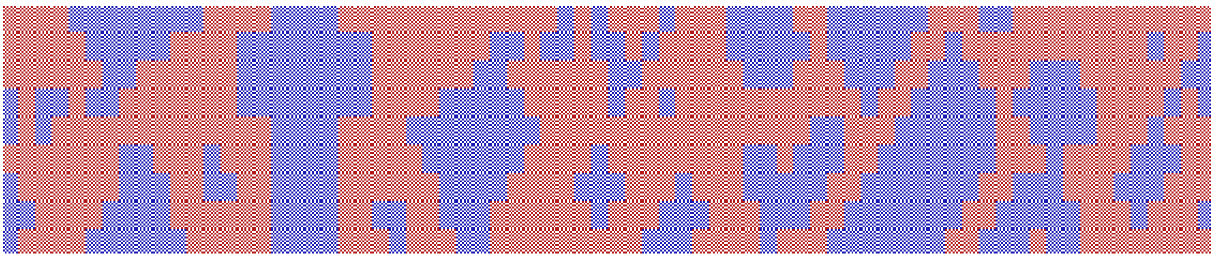
4.1 Adaptivní dynamika

Do procesu se zavede náhodnost, biologicky řečeno mutace. To lze udělat přinejmenším dvěma způsoby. Jednak potomci nemusí být stejného typu, jako rodiče, ale s jistou malou avšak nenulovou pravděpodobností mohou být typu jiného, již existujícího. Tato pravděpodobnost může být dokonce závislá na předchozí zkušenosti - pokud náhodná změna na jistý typ vedla k většímu nárůstu zastoupení potomků, pravděpodobnost získání tohoto typu se zvětší.

Také lze uvažovat náhodný vznik nových typů, nových strategií nebo pomalou změnu strategií stávajících. Oba uvažované procesy systém destabilizují a evolučně stabilní stav v něm nemusí být dosažen.
Náhodné fluktuace lze modelovat na počítači. A tyto pokusy ukazují, že strategie „spolupráce“ se může objevit i dlouhodobě přežívat.

4.2 Replikátorová dynamika v prostoru

Martin Nowak, Robert May a Karl Sigmund studovali, jaký vliv bude mít na „vězňovo dilema“ rozmístění hráčů v prostoru. K tomu definovali konečný automat tak, že stav jeho buněk představoval jednotlivé strategie, a přechod k novému stavu byl určen následujícím postupem: hráč v jedné buňce sehrál s hráči ze všech okolních buněk jedno kolo hry a pro další hru použil tu strategii (stav buňky ze svého okolí), která získala největší výhru. Když autoři tento automat simulovali na počítači tak, že stav buňky byl vyjádřen barvou, otevřel se před nimi „nový svět, který je třeba probádat“. Na obrazovce se ukazovaly pravidelně nebo nepravidelně se posouvající mozaiky, obrazce se srážely a zase rozpojovaly, přežívali „hodní hoši“ i „grázlové“.
Tyto výsledky ukazují, že v přírodě mohou přežívat rozličné subpopulace navzdory nestabilitě svého vzájemného působení. Spolupráce může vytrvat navzdory všudypřítomné hrozbě zneužití, navzdory přirozenému výběru, který preferuje vysokou odměnu za úspěch jednotlivce. Navíc mohou vznikat různé menší jednotky, které zvětšují celkovou komplexnost nebo rozmanitost celku.



Obrázek 4.1: Výsledky simulace „vězňova dilematu” pomocí konečného automatu o 9×27 buňkách. Modrá barva označuje strategii „spolupráce”, červená „podraz”. Na počátku byly červené pouze dvě buňky, po 3 688 krocích vznikne ustálený útvar, v němž je poměr „spolupráce” a „podrazu” roven 76 : 167. Obrázek ukazuje 201. krok simulace.

Kapitola 5

Alternativní přístupy

5.1 Diskrétní dynamika

Uvažujme dvě populaci s oddělenými generacemi a předpokládejme, že doba života jedné generace je h. To znamená, že ke změně v zastoupení subpopulací dochází pouze v časech $t_0, t_0+h, t_0+2h, \ldots$. Populace interagují mezi sebou, subpopulace jedné populace se neovlivňují. Jinými slovy, interakci populací lze vyjádřit bimaticovou hrou.
Budeme předpokládat, že zastoupení každé subpopulace v následující generaci je úměrné její velikosti a „výhře" v generaci současné, tj.

$$x_i(t+h) = c(t)x_i(t)\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i, \qquad y_j(t+h) = d(t)y_j(t)\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j.$$

Koeficienty úměrnosti c a d mohou záviset na čase. Přirozeným požadavkem je, aby časově závislé vektory $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ stále vyjadřovaly zastoupení jednotlivých subpopulací, tj. aby všechny složky vektorů $\boldsymbol{x}(t)$, $\boldsymbol{y}(t)$ byly nezáporné a $\mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{x}(t) = 1 = \mathbf{1}^\mathsf{T}\boldsymbol{y}(t)$ pro všechna $t \in \{t_0, t_0+h, t_0+2h, \ldots\}$. Splnění první podmínky zaručí nezápornost prvků matic A a B, druhá podmínka vyžaduje, aby

$$1 = \sum_{i=1}^{n} x_i(t+1) = c(t)\sum_{i=1}^{n} x_i(t)\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i = c(t)\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)$$

a podobně $1 = d(t)\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)$. Odtud plyne, že

$$c(t) = \frac{1}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)} \quad \text{a} \quad d(t) = \frac{1}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)};$$

koeficienty c a d tedy na čase nezávisí přímo, jejich časová změna je zprostředkována strukturou populací. Provedenou úvahou dostáváme diskrétní replikátorové rovnice ve tvaru

$$\begin{aligned} x_i(t+h) &= x_i(t)\frac{\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}, \qquad i = 1,2,\ldots,n,\\ y_j(t+h) &= y_j(t)\frac{\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}, \qquad j = 1,2,\ldots,m. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Základní rozdíl tohoto systému diferenčních rovnic od základního systému (3.5) je v tom, že matice A a B v (3.5) nemusí být nezáporné. Interpretace těchto matic je tedy různá. Prvek a_{ij} matice A v (5.1) vyjadřuje růstový koeficient i-té subpopulace ovlivněné j-tou subpopulací druhé populace, zatímco v replikátorové rovnici (3.5) vyjadřuje změnu zdatnosti i-té subpopulace ovlivňované subpopulací j-tou.
Rovnice (5.1) můžeme upravit na tvar

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+h) - x_i(t) = x_i(t)\frac{\big(\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)\big)_i - \boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)}{\boldsymbol{x}(t)^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}(t)},$$

$$\Delta y_j(t) = y_j(t+h) - y_j(t) = y_j(t)\frac{\big(\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)\big)_j - \boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}{\boldsymbol{y}(t)^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}(t)}.$$

Z něho je vidět že rovnice (3.5) a (5.1) mají stejné stacionární stavy.
Jako analogii těchto diferenčních rovnic můžeme zavést alternativní diferenciální replikátorové rovnice

$$x_i' = x_i\frac{(\mathsf{A}\boldsymbol{y})_i - \boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{x}^\mathsf{T}\mathsf{A}\boldsymbol{y}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y_j' = y_j\frac{(\mathsf{B}\boldsymbol{x})_j - \boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}^\mathsf{T}\mathsf{B}\boldsymbol{x}}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Interpretace matic A a B v tomto systému je jiná, než v (3.5).

5.2 Imitační dynamika

Replikátorová dynamika (2.3) jistým způsobem napodobuje přirozený výběr (šťastně se přitom vyhnula problémům, které přináší pohlavní rozmnožování). V souvislosti s „hrami“, které provozuje lidská společnost, se však úspěšné strategie šíří nikoliv geneticky, ale napodobováním (memeticky). Jak lze tento proces modelovat?
Předpokládejme, že jedinci populace jsou dokonale promíšeni, každý se může setkat s každým. Čas od času se stane, že jedinec, který používá j-tou strategii po setkání s jedincem používajícím i-tou strategii tuto strategii přijme za vlastní, napodobí jeho chování. Předpokládejme, že počet jedinců, kteří se takovým způsobem zachovají během časového intervalu délky Δt je úměrný délce tohoto intervalu a pravděpodobnosti setkání jedinců používajících tuto strategii. Koeficient úměrnosti označme g_{ij}. Pravděpodobnost, že jedinec používající i-tou strategii potká jedince používajícího j-tou strategii je rovna relativní frekvenci uživatelů j-té strategie. Počet jedinců, kteří po časovém

intervalu délky Δt budou používat i-tou strategii tedy je

$$Nx_i(t+\Delta t) = Nx_i(t) + \sum_{j=1}^{n} Nx_i(t)x_j(t)g_{ij}\Delta t - \sum_{j=1}^{n} Nx_j(t)x_i(t)g_{ji}\Delta t,$$

takže jednoduchou úpravou a limitním přechodem $\Delta t \to 0$ dostaneme diferenciální rovnici

$$x_i' = x_i \sum_{j=1}^{n} (g_{ij} - g_{ji})x_j.$$

V této rovnici je potřeba specifikovat koeficienty g_{ij}. Je rozumné požadovat, aby koeficient g_{ij} závisel na výhrách při strategiích i a j, tedy

$$g_{ij} = \varphi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i, (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big);$$

funkci φ nazveme *pravidlo napodobování.* Nejjednodušší takové pravidlo je „napodobuj lepšího“, tj.

$$\varphi(u,v) = \begin{cases} 1, & u > v \\ 0, & u \le v; \end{cases}$$

jeho nevýhodou je však to, že tato funkce je nespojitá. Budeme proto dále předpokládat, že funkce φ je spojitá a závisí na rozdílu svých argumentů, tedy $\varphi(u,v) = \psi(u-v)$, kde ψ je spojitá neklesající nezáporná funkce. Tímto způsobem dostaneme rovnici

$$x_i' = x_i \sum_{j=1}^{n} x_j \psi\big((\mathsf{A}\boldsymbol{x})_i - (\mathsf{A}\boldsymbol{x})_j\big), \qquad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.2}$$

Zejména můžeme volit $\psi(w) = |w|^\alpha \operatorname{sgn} w$, kde α je nějaké kladné číslo. Replikátorovou rovnici (2.3) můžeme v takovém případě považovat za speciální případ rovnice (5.2) pro $\alpha = 1$.

Literatura

[1] Dawkins, R. *The Selfish Gene.* Oxford University Press, 1989 Český překlad: Sobecký gen, Mladá Fronta, Praha 2003, ISBN 80-204-0730-8.

[2] Dercole, F., Rinaldi, S. *Analysis of Evolutionary Processes. The Adaptive Dynamic Approach and Its Applications.* Princeton University Press, Princeton and Oxford, 2008 ISBN 978-0-691-12006-5.

[3] Hofbauer, J., Sigmund, K. *Evolutionary Games and Population Dynamics.* Cambridge University Press, 2002 ISBN 0-521-6257-X.

[4] Kalas, J., Ráb, M. *Obyčejné diferenciální rovnice.* Masarykova Univerzita, Brno, 1995 ISBN 80-210-1130-0.

[5] Maynard Smith, J., Price, G. The logic of animal conflict. *Nature*, sv. 246, s. 15–18, 1973.

[6] Maynard Smith, J. *Evolution and the Theory of Games.* Cambridge University Press, 1982.

[7] Nowak, M. A., Sigmund, K. The alternating prisoner's dilemma. *J.Theor.Biol*, sv. 168, s. 219–226, 1994.

[8] Nowak, M. A., May, R. M., Sigmund, K. The arithmetics of mutual aid. *Scientific American*, sv. 272, s. 76–81, 1995.

[9] Schuster, P., Sigmund, K. Coyness, philandering and stable strategies. *Anim.Behavior.*, sv. 29, s. 186–192, 1981.

[10] Taylor, P. D., Jonker, L. Evolutionary stable strategies and game dynamics. *Math.Biosci.*, sv. 44, s. 145–156, 1978.

[11] Vincent, T. L., Brown, J. S. *Evolutionary Game Theory. Natural Selection and Darwinian Dynamics.* Cambridge University Press, 2005 ISBN 0-521-84170-4.

Centrum pro rozvoj výzkumu pokročilých řídicích a senzorických technologií
CZ.1.07/2.3.00/09.0031

Ústav automatizace a měřicí techniky
VUT v Brně
Kolejní 2906/4
612 00 Brno
Česká Republika

http://www.crr.vutbr.cz
info@crr.vutbtr.cz